Analyse Complexe ENS Lyon 2011-2012
Corrigé du partiel du 16-03-12

Philippe Eyssidieux

27/03/2012

Exercice 1

Le polynôme $P \in C[X, Y]$ définit une application de classe C^1 de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$. Ses deux différentielles partielles $d_X P, d_Y P$ sont $\mathbb{C}$-linéaires car les fonctions obtenues en gelant l'une ou l'autre des variables sont polynomiales donc holomorphes dont sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire aussi.

La condition $\frac{\partial P}{\partial Y} \neq 0$ implique que la différentielle partielle dans la direction Y est inversible. On peut donc appliquer le theoreme des fonctions implicites pour trouver $\epsilon > 0$ et $f \in C^1(\Delta_\epsilon, \mathbb{C})$ tel que $f(0, 0) = 0$ et $P(z, f(z)) = 0$ et tel que de plus le graphe de f contient un voisinage de $(0, 0)$ dans $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \quad P(z, w) = 0\}$.

Appliquons l'opérateur de Cauchy Riemann $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ à lidentité $P(z, f(z)) = 0$. Il vient

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial P}{\partial Y} = 0.$$

Comme $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial Y} \neq 0$ il suit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ et donc f est bien holomorphe.

Exercice 2

On se limite au cas $\omega \geq 0$. On a en effet $\hat{R}(-\omega) = \overline{\hat{R}(\omega)}$.

Notons $F(z) = e^{i\omega z} \frac{z}{(z^2+1)^2}$. Cette fonction est méromorphe sur $\mathbb{C}$. On note P son ensemble de pôles qui est disjoint de $\mathbb{R}$.

Cette intégrale convergente se calcule par la méthode des résidus et, utilisant les résultats du cours, on trouve

$$\hat{R}(\omega) = 2\pi i \sum_{z_0 \in P \ \Im(z_0) > 0} Res(F, z_0).$$

Le seul pôle de F à considérer est $z_0 = i$ et c'est un pôle double. Pour calculer le résidu on va poser $z = i + w$ et développer à l'ordre 1 en w la fonction holomorphe $\psi(w) = w^2 F(i + w)$.

$$\begin{aligned}
\psi(w) &= e^{-\omega}e^{i\omega w}\frac{i+w}{(2i+w)^2} \\
&= \frac{e^{-\omega}}{-4}(1+i\omega w)(i+w)(1+\frac{w}{2i})^{-2}+O(w^2) \\
&= -\frac{e^{-\omega}}{4}(1+i\omega w)(i+w)(1-\frac{w}{i})+O(w^2) \\
&= -\frac{e^{-\omega}}{4}(1+i\omega w)(i+w)(1+iw)+O(w^2) \\
&= -\frac{e^{-\omega}}{4}(i+(-\omega+1-1)w)+O(w^2) \\
&= -\frac{i.e^{-\omega}}{4}+\frac{\omega e^{-\omega}}{4}w+O(w^2)
\end{aligned}$$

Donc $Res(F,i)=\frac{\omega e^{-\omega}}{4}$. Et $\hat{R}(\omega)=2\pi i\frac{\omega e^{-\omega}}{4}$.
On peut aussi utiliser $Res(F,i)=\psi'(0)$ et calculer la derivée en question.

Exercice 3

La fonction $F=\phi\frac{f'}{f}$ est méromorphe au voisinage de K et sans pôle sur ∂K car ses pôles sont parmi les zéros et pôles de f. Par la formule des résidus:

$$\int_{\partial K}\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\sum_{P\in K}Res(\phi\frac{f'}{f},P)$$

Si $f(z)=(z-P)^v_P\gamma_P$ où γ_P est holomophe non nulle près de P v_P étant la multiplicité du zéro de f en P resp l'opposé de l'ordre de son pôle on a $F(z)=\frac{v_P\phi(z)}{z-z_P}+\phi(z)\gamma'_P(z)$. Comme $\phi.\gamma'_P$ est holomorphe elle ne contribue pas au résidu et comme ϕ est holomorphe F a un pôle simple de résidu $Res(F,P)=v_P\phi(P)$. Ainsi

$$\int_{\partial K}\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\sum_{P\in K}v_P\phi(P).$$

Exercice 4

1

Soit $y\in\mathbb{C}[[z]]$. On a $y''(z)=\sum(n+1)(n+2)a_nn+2z^n$, $y'(z)=\sum n+1a_{n+1}z^n$ par suite E implique en identifiant le terme en z^n dans E la relation de récurrence:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}-\sum_{p=0}^{n}c_{n-p}a_p-\sum_{p=0}^{n}b_{n-p}(p+1)a_{p+1}=0$$

Cette relation de récurrence est linéaire d'ordre 2 et donc l'ensemble S' des suites la vérifiant est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension 2. Concrètement, la formule de récurrence permet d'exprimer a_k comme une combinaison linéaire de a_0, a_1.

Chaque solution de la formule de récurrence fournit une solution de (E) et la correspondance biunivoque solution de (E) - solutions de la formule de recurrence est linéaire donc S est de dimension 2.

Il ne semble pas qu'il y ait une formule fermée simple permettant d'exprimer a_n en fonction de a_0, a_1.

2

On a une application, linéaire, $\tau : O(U) \to C[[z]]$ donnée par la série de Taylor de $f \in O(U)$ en $0 \in U$. Comme U est connexe, le principe des zéros isolés implique que τ est injective et envoie $E(U)$ dans S.

Donc $E(U)$ est un $\mathbb{C}$-vectoriel de dimension inférieure ou égale à deux.

3

Cette question a été correctement traitée donc je me permets d'être elliptique. Les α en question sont les solutions de $\alpha(\alpha-1)+B\alpha-C=0$ et correspondent aux fonctions puissances $(1-z)^\alpha$ solutions de E. Si les racines sont simples, les deux fonctions puissances forment une base, s'il y a racine double, on a besoin du terme logarithmique pour avoir une seconde solution linéairement indépendante.

4

La relation de récurrence pour $(E)_{b,c}$ est:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = \sum_{p=0}^{n} c_{n-p}a_p + \sum_{p=0}^{n} b_{n-p}(p+1)a_{p+1}$$

La relation de récurrence pour $(E)_{B,C}$ est:

$$(n+1)(n+2)a^*_{n+2} = \sum_{p=0}^{n} (n-p+1)Ca^*_p + \sum_{p=0}^{n} B(p+1)a^*_{p+1}$$

En particulier si on part de $a^*_0, a^*_1 \geq 0$ on a $a^*_n \geq 0$.

Posons $a^*_0 = |a_0|,\ a^*_1 = |a_1|$ et vérifions par récurrence $|a_n| \leq a^*_n$.

Pour $n = 0, 1$ c'est assez clair, n'est ce pas?

Supposons donc la propreté établie jusqu'au rang $n+1$ et utilisons la relation de récurrence:

$$(n+1)(n+2)|a_{n+2}| \leq \sum_{p=0}^{n} |c_{n-p}||a_p| + \sum_{p=0}^{n} |b_{n-p}|(p+1)|a_{p+1}|.$$

L'hypothèse de l'énoncé est construite pour que cela implique:

$$(n+1)(n+2)|a_{n+2}| \leq \sum_{p=0}^{n}(n-p+1)C|a_p| + \sum_{p=0}^{n} B(p+1)|a_{p+1}|.$$

et l'hypothése de récurrence implique alors

$$(n+1)(n+2)|a_{n+2}| \leq \sum_{p=0}^{n}(n-p+1)Ca_p^* + \sum_{p=0}^{n} B(p+1)a_{p+1}^*.$$

Soit $(n+1)(n+2)|a_{n+2}| \leq (n+1)(n+2)a_{n+2}^*$.

5

Par la question 3, les solutions de $E_{B,C}$ sont holomorphes sur Δ_1. En particulier pour toute solution de $E_{B,C}$ sa série de Taylor en O a rayon de convergence au moins 1.

Comme le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum a'_n z^n$ dès que $|a_n| \leq |a'_n|$ on déduit de la question 4 que le rayon de convergence des séries formelles solution de E est supérieur ou égal à 1. Ce qui suffit a régler le cas où l'hypothèse précédente est satisfaite.

Mais le fait que b et c sont holomorphes sur Δ_1 n'est pas suffisant pour impliquer l'hypothèse de la question précédente.

On aura seulement, pour $r < 1$ $\sup|b_n r^n| = B_r < +\infty$ et $\sup|c_n r^n|/(n+1) = C_r < +\infty$. On fait donc le changement de variable $z \to rz$ pour se ramener à une équation vérifiant l'hypothèse de la question précédente. Elle aura donc deux solutions linéairement indépendantes ce qui signifie que l'équation originelle a deux solutions linéairement indépendantes dans $\mathcal{O}(\Delta_r)$ ou encore que le rayon de convergence des séries formelles solutions et $\geq r$. Donc le rayon de convergence des séries formelles solutions est supérieure ou égal à 1.

Cette méthode dite des séries majorantes ou on produit pour les solutions series formelles d'un produit une équation de recurrence qui se majore par une inéquation de récurrence à coefficients positifs permet de prouver des versions holomorphes des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel (fonction implicite, inversion locale, cauchy-lipschitz).

6

On prend $U = \mathbb{C} - \{1\}$. Si le polynome de la question 3 a deux racines entieres il y a deux solutions lin. indep, une racine entiere (eventuellement double) une seule et s'il n'en a pas, il n'y a pas de solution non nulle non plus.