Chapitre 6 : Propriétés topologiques de $\mathcal{O}(U)$

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On peut munir $\mathcal{O}(U)$ de plusieurs topologies a priori distinctes

Topologie C^∞ $\quad \mathcal{O}(U) \subseteq C^\infty(U)$ et on munit $\mathcal{O}(U)$ de la topologie C^∞ induite où $C^\infty(U)$ est topologisé par les semi normes

$$\|f\|_{N,K} = \max_{|\alpha|=N} \sup_{z\in K} |\partial^\alpha f(z)| \qquad K \subset\subset U,\ N\in\mathbb{N}$$

Topologie C^p $\quad$ idem avec $N \leq p$ $\quad \mathcal{O}(U) \subset C^p(U)$

Topologie de la convergence uniforme $\quad \|f\|_K = \sup_{z\in K} |f(z)|$. $\quad$ ces précédent $p=0$ $\quad \mathcal{O}(U) \subset C^0(U)$

Topologie L^p_{loc} $\quad \mathcal{O}(U) \subseteq L^p_{loc}(U)$

$$\|f\|_{L^p(K)} = \int_K |f|^p \, d\lambda.$$

Topologie L^1_{loc} $\quad p=1$.

Théorème $\mathcal{O}(U)$ est fermé dans chacun de ces espaces et toutes ces topologies sont équivalentes sur $\mathcal{O}(U)$.

Corollaire $\mathcal{O}(U)$ est un espace de Fréchet, ie un evt métrisable complet.

Preuve : il suffit de le faire pour la plus faible de toutes : la topologie L^1_{loc}

Soit $z_0 \in U$ $\quad \bar{D}(z_0;r) \subset U$

Si $z < r/2$ on a
$$f^{(k)}(z) = \int_{r/2 \leq \rho \leq r} \int_{|t|=\rho} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{C}{|z-r/2|^{n+1}} \int_{\frac{r}{2}\leq|z-z_0|\leq r} |f(t)|\, d\lambda$$

Donc $(\mathcal{O}(U); L^1_{loc}) \longrightarrow (\mathcal{O}(U); C^\infty)$ est continue. Or il est trivial que

$(\mathcal{O}(U); C^\infty) \to (\mathcal{O}(U); C^p) \to (\mathcal{O}(U); C^0) \to (\mathcal{O}(U); L^p_{loc}) \to (\mathcal{O}(U); L^1_{loc})$ continues.

D'autre part il est trivial que $\mathcal{O}(U)$ est fermé dans C^∞ (ou même C^1) et les autres propriétés de fermeture en résultent.

Théorème de Montel :

Une partie F de $\mathcal{O}(U)$ est compacte ssi

- F est fermée
- $\forall K \subset\subset U \ \exists M(K) \ \forall f \in F \quad \|f\|_K \leq M(K)$.

Preuve : $\Leftarrow$ est facile.

$\Rightarrow$ On déduit du théorème précédent que $\forall K \subset\subset U \ \exists M'(K) > 0$ tq

$$\|f\|_K + \|f'\|_K \leq M'(K).$$

Or on a le théorème d'Ascoli :

Soit K un espace métrique compact $F \subseteq C(K)$ est compact ssi

1. F est fermé
3. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall f \in F \ \forall x, y \in K \quad d(x,y) \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
2. $\exists M \ \forall f \in F \ \|f\|_K \leq M$

Le critère est vérifié avec $\eta = \varepsilon / M'(K)$.

On en déduit que E est l'ens de F dans $C(K)$ est compacte pour tout K et on conclut sans peine excessive. □.

Chapitre VI Représentation conforme.

a. conservation des angles

Soit $U \xrightarrow{f} U'$ une fonction holomorphe (f bijection holomorphe $\Rightarrow$ f homéomorphe et son inverse est holomorphe). Alors

$$\forall \gamma_0, \gamma_1 \ [0,\varepsilon[\xrightarrow{C^1} U \qquad \gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0 \quad \gamma_i'(0) \neq 0$$

$$\widehat{(\gamma_0'(0); \gamma_1'(0))} = (df_{z_0} \cdot \gamma_0'(0); \ df_{z_0} \gamma_1'(0))$$

ie df_{z_0} conserve les angles. En effet en dim 2 les seules applications linéaires conservent les angles sont $z \to az$.

Une telle application linéaire est dite conforme.

Aussi quelle on égalt conformes les applications holomorphe

Un homomorphisme conforme est une application holomorphe injective.

b. notion de représentation conforme

Soit U un ouvert une représentation conforme est une homéo conforme

$$\Delta \xrightarrow{f} U$$

Lemme : si U a une représentation conforme U est simplt connexe.

Preuve : U est homéo à D qui est splt cnxe. La splc cnxité est une notion topologique = invariante par homéo.

c) représentations conformes du disque.

Thm: l'ensemble des représentations conformes du disque coïncide avec le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\Delta)$.

On a $\mathrm{Aut}(\Delta) \cong PU(1,1)$ où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(1,1)$ agit sur Δ

par $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ z = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (*)$$

$U(1,1)$ = groupe des ~~auto~~ transf. $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}^2$ préserv la forme hermitienne $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Preuve: - la première contention est claire. Montrons maintenant que $(*)$ définit un morphisme de groupes $PU(1,1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta)$

Notons que $|z|<1 \iff \ell = \mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ ~~est nég~~ est une droite vectorielle <0 pour h

En particulier si $z \in \Delta$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(1,1)$ $\ell' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ell_z = \mathbb{C}\begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}$

vérifie $h|_{\ell'} < 0$ donc $\frac{az+b}{cz+d} \in \Delta$. ~~On vérifie~~

~~En particulier on a bien une action de $PU(1,1)$ sur Δ, par biholomorphismes.~~

donc $g \cdot [\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}] \in PU(1,1) = U(1,1)/\{\pm 1\}$ définit $\sigma(g)$ $\begin{pmatrix} \Delta \to \Delta \\ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{pmatrix}$ une application holomorphe (car méromorphe et bornée).

~~Le~~ $\sigma(e) = id$ $\sigma(g^{-1}) = \sigma(g)^{-1}$ $\sigma(g)\sigma(g') = \sigma(gg')$ sont facilement vérifiés

Rem: Le principe de cette preuve revient à identifier Δ avec l'ensemble des droites vectorielles h-négatives dans $\mathbb{P}^1$ = ~~[illegible]~~ ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$:

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \left\{ \mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ \mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et $PU(1,1)$ est le sous groupe de $PGL(2,\mathbb{C})$ préservant Δ où $PGL(2;\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{P}^1$ par homographies.

- $PU(1,1)$ est transitif sur Δ:

soit $z_0 \in \Delta$ $g = \frac{1}{(1-|z_0|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & -z_0 \\ -\bar{z}_0 & 1 \end{pmatrix} \in U(1,1)$ $\sigma(g)\cdot z = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$ envoie z_0 sur 0.

- tout automorphisme de Δ tq $f(0)=0$ est une rotation

~~$\sup_{|z|=r} |f(z)| \leq 1$~~ Preuve $\frac{f(z)}{z}$ holomorphe

$M(r) = \sup_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1/r$ mais comme $M(r)\uparrow$ par le principe du max on a

$M(r) \leq 1$ et $|f(z)| \leq |z|$. (+)

Appliqué cela à $f^{-1}(z)$ on a aussi $|f^{-1}(z)| \leq |z|$

D'où Mais (+) signifie $|f(z)| \leq |f^{-1}f(z)|$ donc $|f(z)| = |z|$.

Et la $\left|\frac{f(z)}{|z|}\right|$ atteint son max en tout pt du disque et par le ~~pas~~ d'égalité du principe du max $f(z) = cz$. $c \in \mathbb{C}$. Bien sûr $c \in U(1)$.

et $f(z) = e^{i\theta} \cdot z$ $\theta \in \mathbb{R}$. $g_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$ vérifie $f = \sigma(g)$. □.

d) demi-plans

Thm: $H = \{\tau \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Im}\tau > 0\}$. L'application $\begin{pmatrix} H \to \Delta \\ \tau \to z = \frac{\tau - i}{\tau + i} \end{pmatrix}$ est une bijection holomorphe

sa réciproque $h\begin{pmatrix} \Delta \to H \\ z \mapsto \tau = -i\frac{z+1}{z-1} \end{pmatrix}$ est une repr. conforme et

$\operatorname{Aut}(H) \cong PSL_2(\mathbb{R})$ où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{R})$ agit par homographies sur H.

Preuve: - $z = \frac{\tau - i}{\tau + i} \iff \tau z + iz = \tau - i \iff \tau(z-1) = -i - iz$
$\iff \tau = -i\frac{(z+1)}{z-1}$

- ~~pour le groupe des~~ le reste est admis.

e) Bandes et secteurs angulaires

$\log$ = ~~déf~~ principale du log.

$\Delta \xrightarrow{h} H \xrightarrow{\log} B = \{z \in \mathbb{C} \quad 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ $\psi = \log \circ h$ est une repr. conforme de la bande B

Soit k $0 < k < 2$ et $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \quad 0 < \arg(z) < k\pi\}$

$\mathcal{A} \xrightarrow{\log} kB$ est alors ~~une~~ ~~sup~~ biholomorphe et

$\begin{pmatrix} \Delta \to \mathcal{A} \\ z \mapsto e^{k\psi(z)} \end{pmatrix}$ est une repr. conforme de $\mathcal{A}$.

f) théorème fondamental de la représentation conforme.

Théorème: Soit $U \subset \mathbb{C}$ tq 1) $U \neq \emptyset$
2) U simplement connexe

Alors $\Delta \to U$ une représentation conforme.

Remarque: 1) est nécessaire car sinon $\exists f : \mathbb{C} \to \Delta$ holomorphe non constante

Preuve:

Etape1: Réduction au cas d'un ouvert borné:

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus U$ et $g : \mathcal{O}(U)$ une détermination continue de $\log(z-a)$

On a $\forall z \in U \quad e^{g(z)} = z - a$

Donc $g : U \to g(U)$ est holomorphe injective et par suite $\exists\, \gamma : g(U) \to U$ tq $\gamma = g^{-1}$

Soit $a \in U$ et soit $r > 0$ tq $g(U) \ni \Delta(g(a); r) = \{z \in \mathbb{C} \quad |z - g(a)| < r\}$

r existe par le thm de l'application ouverte.

~~Notons que~~

On a: $g(U) \cap 2\pi i + \Delta(g(a); r) = \Delta(g(a) + 2i\pi; r) \cap g(U) = \emptyset$.

En effet si $\gamma \in \cdot \cap \cdot$ on a

$\exists z \in U \quad \gamma = g(z)$
$\exists z' \in U \quad \gamma + 2i\pi = g(z')$

mais alors ~~$z - a = z' - a = e^{\gamma + 2i\pi}$~~

$z - a = e^{\gamma} = e^{\gamma + 2i\pi} = z' - a$ et $z = z'$
ce qui est une contradiction.

Donc $g(U) \subset \Delta(g(a) + 2i\pi; r)^c$

Or $I_b : \left(z \longmapsto \dfrac{1}{z - b} \right)$ est une ~~bijec~~ bijection biholomorphe de $\Delta(b, \rho)^c$ sur $\Delta^*(0; 1/\rho)$

de sorte que $I_b \circ g$ est une bijection biholomorphe de U sur son image qui est contenue dans $\Delta(0, 1/r)$.

Etape2: U ouvert simplement connexe et borné, $0 \in U$

~~Alors il existe une fonction holomorphe $f : \Delta \to U$ tq~~

~~$f(0) = 0$~~
~~$|f'(0)| = \max_{f \in}$~~

Soit $\mathcal{F} = \{ \varphi : U \to \Delta$ tq $\varphi(0) = 0$ et φ injective $\}$

Alors $\exists f \in \mathcal{F}$ tq $|f'(0)| = \max_{\varphi \in \mathcal{F}} |\varphi'(0)| < +\infty$.

Notons que si $\psi \in \mathcal{O}(\Delta)$ $|\psi'(0)| \leq \sup_{z \in \Delta(0,\varepsilon)} \frac{|\psi(z)|}{\varepsilon}$ par Cauchy si $\Delta(0,\varepsilon) \subset U$

donc si $\varphi \in \mathcal{F}$ $|\varphi'(0)| \leq \sup_{z \in \Delta} |\varphi(z)| \leq \sup_{u \in U} |u|$.

Également, notons que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car U est borné.

$\mathcal{F}$ est précompact par le théorème de Montel et la limite f de toute suite extraite de $(\varphi_n) \in \mathcal{F}$ tq $|\varphi_n'(0)| \longrightarrow \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} |\varphi'(0)|$ vérifie $|f'(0)| = \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} |\varphi'(0)|$

car $\begin{pmatrix} \mathcal{O}(U) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varphi'(0) \end{pmatrix}$ est continue.

f est aussi injective. ~~En effet si~~ En effet f n'est pas constante (car $|f'(0)| \neq 0$) et si $z_1, z_2 \in U$ vérifie $f(z_1) = f(z_2) = b$

f ne prend pas la valeur b sur les cercles $S(z_1; \varepsilon_1)$ et $S(z_2, \varepsilon_2)$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ pts

car $f = b + g(z)^{m_1}$ $g = c(z - z_1) + O((z - z_1)^2)$ $c \neq 0$ donc φ inj près de z_1.

Donc pour $n \gg 0$ φ_n ne prend pas la valeur b sur ces 2 cercles non plus.

Par suite $\displaystyle\int_{S(z_1;\varepsilon_1)} \frac{\varphi_n'(z)}{\varphi_n(z) - b} = 2\pi i \, Z_n$ où Z_n = nbre de solutions de $\varphi_n(z) = b$ dans $\Delta(z_1; \varepsilon_1)$

mais $\varphi_n \to f$ $\varphi_n' \to f$ et $Z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} m$

Donc $Z_n > 0$ pour $n \gg$ et φ_n prend la valeur b sur $\Delta(z_1, \varepsilon_1)$

De m̂ ——— $\Delta(z_2, \varepsilon_2)$

contradiction à l'injectivité de φ_n.

< L'injectivité est une propriété "presque fermée" loc. ; > (~~car fn inj con~~ une limite de f^{ns} holo injectives est injective ou constante !

Etape 3 ~~[illegible] une représentation conforme. il suffit de voir que~~

$f(U) = \Delta$.

Par l'absurde, supposons que $a \in \Delta \setminus f(U)$. ~~On peut comparer zero car~~ choisissons une détermination continue de $\left(z \mapsto F(z) = \log \frac{f(z) - a}{1 - \bar{a} f(z)} \right)$ ~~est bien~~ Possible car U sup̂t connexe. C'est $z \mapsto \frac{f(z) - a}{1 - \bar{a} f(z)}$ n'a pas de zéro ni de pôle

~~$F(z) \to F(0)$~~
~~$F(z) \to F(0)$~~

Notez que $\dfrac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)} = \sigma(g_a)\cdot f(z)$ où

$g_a \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ envoie a sur 0

donc $\dfrac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)} \in \Delta$. et $\mathrm{Re}\, F(z) < 0$.

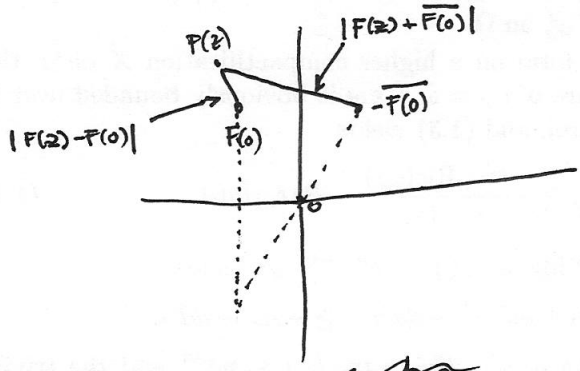
Posons :

$$g(z) = \frac{F(z)-F(0)}{F(z)+\overline{F(0)}} \quad \text{pour } z \in U.$$

g méromorphe.

g holomorphe car $\mathrm{Re}\,\overline{F(0)} = \mathrm{Re}\, F(0) < 0$ donc $\mathrm{Re}\,(F(z)+\overline{F(0)}) < 0$.

$|g| < 1$.



g injective sur U. ~~$g = \log$~~

$$g(z) = g(z') \Rightarrow F(z) = F(z') \Rightarrow \frac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)} = \frac{f(z')-a}{1-\bar{a}f(z')}$$
$$\Rightarrow f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$$

$g(0) = 0$

$$g'(z) = \frac{F'.\,F+\overline{F}(0) - F'(F-F(0))}{[F(z)+\overline{F(0)}]^2} = F'(z)\,\frac{F(0)+\overline{F(0)}}{(F(z)+\overline{F(0)})^2}$$

$$g'(0) = \frac{2\,\mathrm{Re}\,F(0)}{4\,\mathrm{Re}\,F(0)^2}\cdot F'(0) = \frac{F'(0)}{2\,\mathrm{Re}\,F(0)}$$

$$F(0) = \log\frac{-a}{1-\bar{a}\cdot 0} = \log(-a)$$
$$= \log|a| + i\theta = -\log|a|^{-1} + i\theta$$

$=$ ~~$\log|a|$~~

$$F'(0) = \frac{f'(1-\bar{a}f) + (f-a)\bar{a}f'/(1-\bar{a}f(z))^2}{f(z)-a/1-\bar{a}f(z)} = \frac{(1-|a|^2)f'}{(f-a)(1-\bar{a}f)} = \frac{f'(0)}{-a}(1-|a|^2)$$

$$|g'(0)| = |f'(0)|\,\frac{1-|a|^2}{2|a|\log|a|^{-1}}.$$

~~Ah bon alors~~

Lemme: Soit $t \in]0,1[$ $\qquad \dfrac{1-t^2}{t} > 2\log 1/t$

En effet $\dfrac{d}{dt}\dfrac{1-t^2}{t} - 2\log 1/t = -1/t^2 - 1 + 2/t$

$$= -\frac{(t-1)^2}{t^2} < 0$$

et $\dfrac{1-t^2}{t} - 2\log 1/t \Big|_{t=1} = 0$

donc $|g'(0)| > |f'(0)|$ et la contradiction attendue s'ensuit. $\square$

Remarque: Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ quelconque et $p \in U$. On peut ~~[illegible]~~ extrémiser par la méthode de l'étape 2 $|g'(0)|$ où $g : \Delta \longrightarrow U$ vérifie $g(0) = p$.

Si U est simplt connexe, c'est la rep. conforme de U.

Pour votre réflexion, une Question: quelle est la fonction extrémale ?

g) Formule de Schwarz - Christoffel.

Un polygône convexe P  est simplement connexe

Question: comment trouver $\Delta \xrightarrow{f} \mathring{P}$ une représentation conforme sur l'intérieur de P.

En particulier pour $P = Q$ un quadrilatère ?

La réponse sera donnée plus loin.

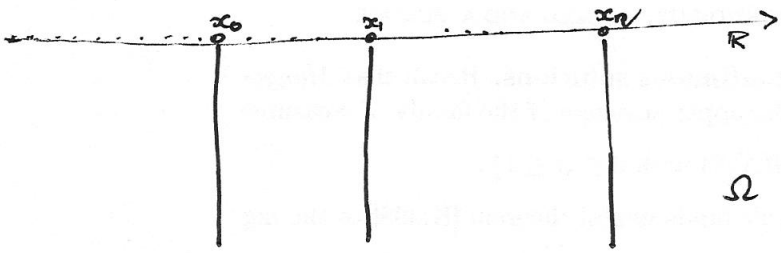
Soient $x_0 < \dots < x_r \in \mathbb{R}$ $\quad 0 < \delta_0, \dots, \delta_r < 1$ tq $\sum_{i=1}^{r} \delta_i = 2$.

On considère la fonction $f \in \mathcal{O}(H)$ $\qquad H = \{\tau \in \mathbb{C} \ \operatorname{Im}\tau > 0\}$

$f(\tau) = (\tau - x_0)^{-\delta_0} \dots (\tau - x_r)^{-\delta_r}$. où on a utilisé la détermination

du logarithme sur H tq $0 < \arg(z) = \operatorname{Im} \log z < \pi$

f se prolonge ~~en~~ en une fonction holomorphe sur l'ouvert simplement connexe ci-dessous :



et donc ~~conv~~ à une fonction C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0 \cdots x_n\}$

~~[illegible]~~

Si $t \in]x_i ; x_{i+1}[$ on a alors

$$f(t) = |t-x_0|^{-\delta_0} \cdots |t-x_n|^{-\delta_n} \cdot \underbrace{e^{-i\pi(\delta_n + \cdots + \delta_{i+1})}}_{e^{i\pi(\delta_0 + \cdots + \delta_i)}}$$

et $f(t) = \prod_{i=1}^{n} |t-x_i|^{-\delta_i}$ si $t < x_0$ ou $t > x_n$ (1ère utilisation de $\sum \delta_i = 2$)

Comme $0 \leq \delta_i < 1$ f ~~définit~~ se prolonge à une fonction de classe L^1_{loc} sur $\mathbb{R}$ et comme $f(t) \sim |t|^{-2}$ si $|t| \to +\infty$ f est L^1 sur $\mathbb{R}$.

Soit $F : \Omega \to \mathbb{C}$ une primitive de f définie sur Ω normalisée de sorte que

~~$F|_{\mathbb{R} \setminus \{x_0 \cdots x_n\}} = \int_{-\infty}^{\cdot}$~~

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0 \cdots x_n\}$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

F envoie $]-\infty, x_0[$ sur le segment $]0 ; F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} |u-x_i|^{-\delta_i} du[$

$]x_0 ; x_1[$ sur le segment $]F(x_0) ; F(x_0) + e^{i\pi\delta_0} \int_{x_0}^{x_1} |u-x_i|^{-\delta_i} du[$

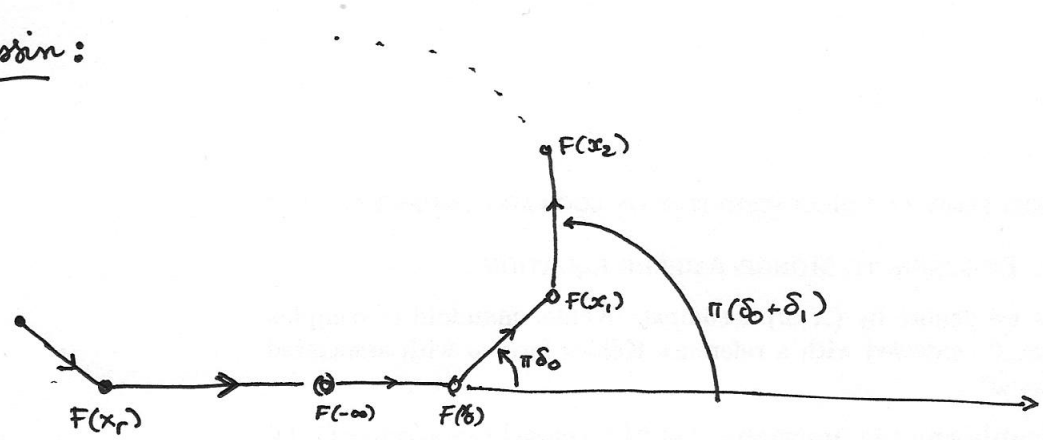
$\vdots$

$]x_i ; x_{i+1}[$ ——— $]F(x_i) ; F(x_i) + e^{i\pi(\delta_0 + \cdots + \delta_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u-x_i|^{-\delta_i} du[$

$]x_r ; +\infty[$ ——— $]F(x_r) ; F(x_{r-1}) + \int_{x_r}^{+\infty} |u-x_i|^{-\delta_i} du[.$

<u>Fait</u> : $F(+\infty) = F(x_r) + \int_{x_r}^{+\infty} \Pi |u-x_i|^{-\delta_i} du = 0$

Dessin :



Preuve du fait :

on utilise le chgt de variable habituel

$$z = \frac{\tau - i}{\tau + i} \quad \tau \in H. \qquad z \in \Delta. \qquad \tau = \frac{-i - iz}{z-1} = -i\,\frac{z+1}{z-1}$$

On a $\quad f(\tau)d\tau = g(z)dz \quad$ où

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{d}{dz}\left(-i\left(1+\frac{2}{z-1}\right)\right) = +2i/(z-1)^2$$

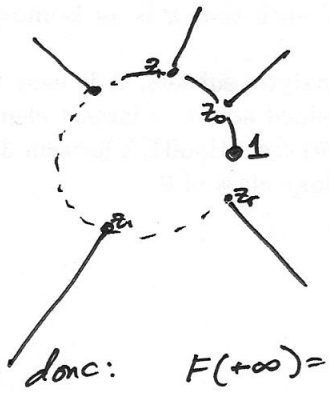
$$g(z)dz = \left(-i\,\frac{z+1}{z-1} - x_0\right)^{-\delta_0} \cdots \left(-i\,\frac{z+1}{z-1} - x_r\right)^{-\delta_0} \frac{2i\,dz}{(z-1)^2}$$

$$= \left(-i(z+1) - x_0(z-1)\right)^{-\delta_0} \cdots \left(-i(z+1) - x_r(z-1)\right)^{-\delta_r} 2i\,dz.$$

$$= \prod_{j=1}^{r} (z - z_j)^{-\delta_j}\, dz$$

avec $\quad z_j = \dfrac{x_j - i}{x_j + i}$ est un nombre complexe de module 1. $\neq 1$.

$g(z)$ se prolonge à l'ouvert sph-exc :



et si $dG = g(z)dz$

$G(z) = F(\tau)$ ie

$G = F \circ \left(z \mapsto -i\,\frac{z+1}{z-1}\right)$

donc : $\quad F(+\infty) = F(-\infty) = G(1) = 0$!

~~Soit~~

- Soit $t \in \mathbb{R}$ on a $\operatorname{Im} F(t) \geq 0$.

En effet $\operatorname{Im} F(t) = \int_{-\infty}^{t} \operatorname{Im} f(u)\, du$

mais $\operatorname{Im} f(u) \geq 0$ pour $u \in]-\infty ; x_i[$ $\quad (\delta_0 + \cdots + \delta_i) \leq 1$

$\operatorname{Im} f(u) < 0$ pour $u \in]x_j ; +\infty[$ si $\delta_0 + \cdots + \delta_{j+1} > 1$

donc $\operatorname{Im} f(u)$ est d'abord ≥ 0 puis < 0

de sorte que $\operatorname{Im} F$ ~~est varie~~ croît sur $]-\infty, x_{i_0}[$ puis décroît sur $]x_{i_0} +\infty[$

Il suit que $\operatorname{Im} F \geq 0$ car les valeurs limites sont 0.

- Soit $\tau \in H$ on a $\operatorname{Im} F(\tau) \geq 0$. ie soit $z \in \Delta$ $\operatorname{Im} G(z) \leq 0$

En effet $\gamma = e^{iG}$ vérifie $|\gamma| \leq 1$ sur $\partial\Delta$ donc $|\gamma| \leq 1$ sur Δ

par le principe du max.

- En terme de G ~~nous~~ ceci se reformule comme :

$G(\bar{\Delta})$ est contenu dans le demi-plan à gauche de la droite orientée définie

par le vecteur $\overrightarrow{G(z_r) \cdot G(z_0)}$. ~~elle~~ conste d'après

- Mais en faisant ~~des~~ chgts de variable $z \to e^{i\theta} z$ dans ~~les~~ l'intégrale

définissant G on modifie G en $\tilde{G} = \alpha G + \beta$ $\alpha \in \mathbb{C}^*$ donc

$G(\bar{\Delta})$ par une similitude directe et donc

$G(\bar{\Delta})$ est dans le demi plan à gauche de la droite

orientée définie par $\overrightarrow{G(z_i)\, G(z_{i+1})}$ $\forall i = 0 \cdots r$.

- Donc $F(\bar{H})$ est contenu dans le convexe intersection de ces demi plans ;

~~est~~ est un polygone convexe dont les arêtes sont les segt $[F(x_i) F(x_{i+1})]$ $i = 0 \cdots r$, $x_{r+1} = x_0$!

~~(En effet $\forall i, j \in \bar{H}$ le segt $[F(x_k) F(x_l)]$ est contenu dans $\bar{H}$ et~~
~~le tour de passe-passe avec G montre que $[F(x_k) ; F(x_l)]$ est contenu~~
~~dans chaque demi plan $\bar{H}_i$! Donc que chaque $F(x_k) \in \bigcap_i \bar{H}_i = K$~~
~~En fait $\bigcap_i \bar{H}_i = \operatorname{Conv}(F(x_k))$ $k = 0 \ldots r$ En effet $F(x_k) \in \partial K$. pour tout k~~
~~et même $F(x_k)$ pt extrémal de K. Si K a un $\bigcap_i H_i = \operatorname{Conv}(P_j)$~~
~~où (P_j) pts extrémaux de K. Si P_j pt extrémal hors des $F(x_i)$ on a~~
~~un demi~~

En effet $[\cancel{F(x_k);F(x_l)}]$ chaque $F(x_k)$ est contenu ds $\bar{H}$ $\forall k,l$.

En part ~~chaque segt~~ $F(x_k)$ est ds $\bigcap_k \bar{H}_k$. ~~où $\bar{H}_k$~~

Donc $\mathrm{conv}(\{F(x_k)\}_{k=0\dots r}) \subset \bigcap_k \bar{H}_k$

D'autre par $[F(x_k);F(x_{k+1})]$ est dans le bord de $\bigcap_k \bar{H}_k$ et en forme un segment maximal ~~Comme le bord est contenu~~ intersection avec ~~$\bar{H}_k$~~ la droite $\partial\bar{H}_k$ ~~donc~~ $\partial \bigcap_k \bar{H}_k \subset \bigcup_k \partial\bar{H}_k$ donc

$$\partial \bigcap_k \bar{H}_k = \bigcup [F(x_k);F(x_{k+1})].$$

<u>Théorème</u>: $G:\Delta \longrightarrow P = \overset{\circ}{\overline{\mathrm{Conv}(\{F(x_k)\})}}_{k=0\dots r}$ est une ~~application~~ représentation conforme.

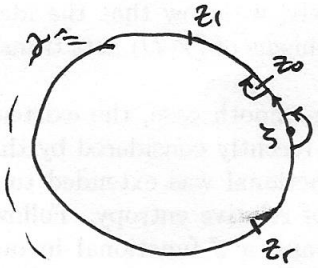
Par le principe du max $G(\Delta) \subset \overset{\circ}{\overline{\mathrm{Conv}\{F(x_k)\}}}_{k=0\dots r}$

~~On a $G'\neq 0$ donc G~~

Pour voir la surjectivité notons que G prolge par continuité à $\partial\Delta$ et que $G:\partial\Delta \longrightarrow \partial P$ est une bijection, donc un homéo

par suite ~~si~~ $w\in \partial P\setminus\{F(x_i)\}$ $G^{-1}(w)\cap\partial\Delta$ est un pt, avec multiplicité 1

car G' En intégrant $\dfrac{G'(z)}{G(z)-w}$ sur γ =



on trouve $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{G'(z)}{G(z)-w}\,dz = 1.$

En posant ~~w à~~ si $w'\in \overset{\circ}{P}$ proche de w on a aussi $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{G'(z)}{G(z)-w'}\,dz = 1$

puis $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\bar\Delta} \frac{G'(z)}{G(z)-w'}\,dz = 1$ mais ceci est cont en $w\in\overset{\circ}{P}$ et $\overset{\circ}{P}$ connexe

Donc $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\bar\Delta} \frac{G'(z)}{G(z)-w}\,dz = 1$ $\forall w\in\overset{\circ}{P}$ ~~et~~ $G:\Delta\to\overset{\circ}{P}$ est une bijection. $\square$.

<u>Remarque</u>: pour $r=4$ $\delta_i = 1/2$ ~~[illegible]~~ la rep. conforme de  ~~est~~ une ~~[illegible]~~ intégrale elliptique (Abel).