Chapitre 2 : Séries

a) séries formelles.

Déf On munit l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes

de l'addition $(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$

et de la mult $(a_n)\cdot(b_n)=\left(c_n=\sum_{p+q=n} a_p b_q\right)$.

Avec ces lois $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un anneau commutatif unitaire. L'ensemble $\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}}$ des suites telles que $n>>0 \Rightarrow a_n=0$ est un sous anneau

$(\mathbb{C}_0^{\mathbb{N}},+,\cdot)$ est en fait l'anneau des polynômes à une indeterminée à coeff complexes noté généralt $\mathbb{C}[X]$

On écrit pour $P\in\mathbb{C}[X] \Leftrightarrow P(X)=\sum_{n=0}^{N} a_n X^n$. $X=(0,1,0,0\ldots$

$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$ se note généralt $\mathbb{C}[[X]]$ et on écrit pour

$Q\in\mathbb{C}[[X]]$ $Q(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$.

On manipule séries formelles comme des polynômes avec un infinité de coefficients et il n'y a pas le moindre problème.

Opérations algébriques:

- somme, produit
- derivation $Q'(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n X^{n-1}$
- substitution si $Q(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n X^n$

$$P(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$$

$P\circ Q\in\mathbb{C}[[X]]$ defini par

$$P\circ Q(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m X^m\right)^n \quad \text{(vérifier!)}.$$

- inversion: si $Q(X)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ $a_0\neq 0$

$$\frac{1}{Q(X)}=\frac{1}{a_0}\, S\circ\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_0}X^n\right)$$

$$S(X)=\frac{1}{1+X}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k X^k.$$

Remarque: Si on munit $\mathbb{C}[X]$ de la topologie X-adique dont une base de voisinage ouverts de 0 est formée des $X^n\mathbb{C}[X]$ $n \in \mathbb{N}$;

$\mathbb{C}[[X]]$ est le complété de $\mathbb{C}[X]$ pour la topologie X-adique

b) <u>Rayon de convergence d'une série formelle.</u>

Déf $Q = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ $\qquad 1/R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$R \in [0;+\infty]$ est le rayon de convergence de Q.

Prop: Soit $r>0$ $\quad R(Q) > r \overset{(1)}{\Longrightarrow} \exists M \ \forall n \quad |a_n| \leq M.r^{-n}$ $\overset{(2)}{\Longrightarrow} R(Q) \geq r$

Preuve: • $\exists M \ \forall n \quad |a_n| \leq Mr^n \iff \exists M' \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad |a_n| \leq M' r^{-n}$

$\Leftarrow$: $M = \sup(M'; |a_0|; |a_1|; \dots; r^{n_0}|a_{n_0}|)$.

• $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r}$ on a pour $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1/r \quad \text{et} \quad |a_n| \leq r^{-n}.$$

• $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{M} \cdot r^{-1} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1/r$

Cor: $R(P+Q) \geq \min(R(P); R(Q))$

$R(PQ)$

$R(P') = R(P)$.

Laissé en exercice.

c) <u>Somme d'une série entière</u>

Théorème-Définition: $Q \in \mathbb{C}[[z]]$ alors la d'application de $D_R = \{z \in \mathbb{C} \ |z| < R(Q)\}$ à val. dans $\mathbb{C}$ donnée par $f_N : \left(z \longmapsto \sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right)$ converge uniformément dans $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \ |z| \leq r\}$ pour tout $r < R(Q) = R$. Sa somme est une fonction holomorphe $s(Q) \in \mathcal{O}(D_R)$ dont la dérivée est $s(Q') \in \mathcal{O}(D_R)$.

En particulier $s(Q) \in \mathcal{O}(D_R) \cap C^\infty(D_R)$.

Notant $\mathbb{C}[[X]]_R = \{Q \in \mathbb{C}[[X]] \quad R(Q) \geq R\}$

$\mathbb{C}[[X]]_R$ est un anneau et $s : \mathbb{C}[[X]]_R \longrightarrow \mathcal{O}(D_R) \cap C^\infty$ est un morphisme d'anneaux.

On note $\mathbb{C}\{\{X\}\} = \bigcap_{R>0} \mathbb{C}[[X]]_R$ et on a $s : \mathbb{C}\{\{X\}\} \to \mathcal{O}_0 := \bigcap_{R>0} \mathcal{O}(D_R)$

<u>Cex:</u> $\sum_{n \in \mathbb{N}} n!\, X^n \notin \mathbb{C}\{\{X\}\}$.

<u>Preuve:</u> - Rappelons que si T est un espace topologique une série de fonctions $\sum f_n$ $\quad f_n : T \to \mathbb{R}$ est absolument convergente dès que la suite $S_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$ des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy uniforme:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall p, q \geq N_0 \quad \sup_{t \in T} |S_p(t) - S_q(t)| < \varepsilon .$$

La limite de la suite de fonctions (S_N) est la somme de la série notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ ~~définit~~ est alors une fonction continue de T dans $\mathbb{R}$.

- Soit $\varepsilon > 0$ tq $R(Q) > r + \varepsilon$
Posons $T = \overline{D_r}$ on a pour $z \in \overline{D_r}$ $\quad |a_n z^n| \leq M\left(\frac{z}{r+\varepsilon}\right)^n$

$$\leq M\left(r/r+\varepsilon\right)^n$$
$$= M\theta^n$$

avec $0 \leq \theta < 1$ donc

$$\sup_{z \in \overline{D_r}} \left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n z^n \right| \leq M\left(\sum_{n=p+1}^{q} \theta^n\right)$$

~~est~~ le critère de Cauchy uniforme résulte de la convergence de la série géom. de raison θ. Ce qui établit le premier point.

- Rappelons que si $T \subset \mathbb{R}^N$ est ouvert une série de fonctions diff $\sum f_n$ tq $\sum f_n$ et $\sum df_n$ converg unif sur T la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est diff de différentielle $\sum_{n=0}^{\infty} df_n$.

- Appliqué ceci à la suite des sommes partielles de Q sur $T = D_r$ nous voyons que $f = s(Q)$ est différentiable de différentielle :

$$df = s(Q') \cdot dz$$

Donc $f \in \mathcal{O}(D_r)$ pour tout $r < R(Q)$ puis $f \in \mathcal{O}(D_R)$ car la condition d'holomorphie est locale.

- Mais on peut dire la même chose de Q' donc df est continue et

$$s(Q) \in \mathcal{O}(D_R) \cap C^1(D_R).$$

- appliqué ceci à Q' $\quad s(Q) \in \mathcal{O}(D_R) \cap C^2(D_R)$ et ainsi de suite. $\square$.

d) <u>Exemples :</u>

+ $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C}[[z]]_\infty$

$ch(z) = e^z + e^{-z}/2$ $\qquad \cos(z) = e^{iz} + e^{-iz}/2$

$sh(z) = e^z - e^{-z}/2$ $\qquad \sin(z) = e^{iz} - e^{-iz}/2i$

+ fonctions trigonométriques usuelles
— trigonométriques-hyperboliques —

On a : $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$

+ $(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n \in \mathbb{C}[[z]]_1$. si $\alpha \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$

+ $\log(1+z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n} \in \mathbb{C}[[z]]_1$.

noter que $\frac{\partial}{\partial z} \log(1+z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{n-1} = +\frac{1}{1+z}$

<u>Formule :</u> $(1+z)^\alpha = \exp(\alpha \cdot \log(1+z))$

<u>Preuve.</u> $\frac{\partial}{\partial z} \exp \alpha \log(1+z) = \alpha/1+z \cdot \exp \alpha \log(1+z)$ d'où

$$\frac{\partial}{\partial z}(1+z)^\alpha = \frac{\alpha}{1+z}(1+z)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+z}(1+z)^\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(1+z)^\alpha}{\exp \alpha \log(1+z)}\right) = \frac{(1+z)^\alpha e^{\alpha \log(1+z)} \frac{\alpha}{1+z} - (1+z)^\alpha e^{\alpha \log(1+z)} \frac{\alpha}{1+z}}{\exp \alpha \log(1+z)^2} = 0$$

Donc $(1+z)^\alpha = \text{cste} \cdot \exp \alpha \log(1+z)$ $\quad z=0 \Rightarrow \text{cste} = 1$.

Chapitre 3 : Formule de Cauchy.

a) intégrales curvilignes

Soient $a<b \in \mathbb{R}$.

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin $\overbrace{C^1}^{\text{continu}}$ par morceaux c'est à dire qu'il existe $a_0 = a < a_1 < \dots < a_k = b$ tq $\gamma|_{[a_i ; a_{i+1}]}$ soit C^1 et

Soit $\alpha \in E^1 \cap C^0(U)$ où U ouvert contenant $\gamma[a,b]$.

On définit $$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$\alpha_x, \alpha_y \in C^0(U)$

$$\alpha = \alpha_x dx + \alpha_y dy \qquad \gamma(t) = x_\gamma(t) + i y_\gamma(t)$$

$$\alpha_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) = \alpha_x(\gamma(t))\, x'_\gamma(t) + \alpha_y(\gamma(t))\, y'_\gamma(t)$$

Proposition (0) $\int_\gamma$ est $\mathbb{C}$-linéaire en α.

(1) Soit $\varphi : [\bar a, \bar b] \to [a,b]$ une bijection croissante de classe C^1 ainsi que son inverse (ie $\varphi' > 0$). Soit $\bar\gamma = \gamma \circ \varphi$.

$$\forall \alpha \in E^1 \cap C^0(U) \qquad \int_{\bar\gamma} \alpha = \int_\gamma \alpha$$

(2) Soit $\psi \in C^1(U)$ $$\int_\gamma d\psi = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a))$$

(3) $\alpha \in E^0 \cap C^1(U)$ $\quad \|\alpha_p\| = \sqrt{\alpha_x(p)^2 + \alpha_y(p)^2}$ $\quad \text{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$

$$\left| \int_\gamma \alpha \right| \leq \sup_{p \in \gamma[a,b]} \|\alpha_p\| \cdot \text{long}(\gamma)$$

Preuve:

(1) Ceci résulte de $$\int_{\bar a}^{\bar b} F(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_a^b F(s)\, ds \qquad F \in C^0[a,b]$$

appliqué à $F(s) = \alpha_{\gamma(s)} \cdot \gamma'(s)$

(2) $$d\psi_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) = \frac{d}{dt} \psi(\gamma(t))$$

$$\int_\gamma d\psi = \int_a^b \frac{d}{dt} \psi(\gamma(t))\, dt = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a))$$

(3) clair.

Variante: Si $\gamma : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est un lacet C^1 par morceaux on définit $\int_\lambda \alpha = \int_\gamma \alpha$ où $\gamma : [x ; x+T] \to \mathbb{C}$ est un relèvement arbitraire de λ.