Analyse Complexe L3. ENS Lyon 2011-2012.

Chapitre 1 : Equations de Cauchy-Riemann

a) définition des fonctions holomorphes

Définition Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $z_0 \in \mathcal{U}$. $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si $\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \overset{def}{=} f'(z_0) \in \mathbb{C}$.

$f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point z_0 de $\mathcal{U}$. Not $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$.

Remarque holomorphe $\Rightarrow$ continue.

Propriétés formelles.

- Si f, g sont holomorphes sur Ω $f+g$, $f \cdot g$ le sont également
  f/g est holo sur $\mathcal{U} \setminus g^{-1}(0)$
- Si $\mathcal{U} \xrightarrow{g} \mathcal{U}' \xrightarrow{f} \mathcal{U}''$ et f, g holomorphes $f \circ g$ est holomorphe
  $\subset \quad \cap \quad \supset$
  $\mathbb{C}$
- ~~Quelques formules de l'analyse des fonctions~~
- Les constantes et les fonctions linéaires $(z \mapsto az)$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$
- En conséquence les polynômes à coeff. complexes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.
  ~~avec~~ Une fonction rationnelle, c'est à dire une fonction de la forme $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ est holomorphe sur son domaine $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(0)$
- Les formules habituelles du calcul des dérivées sont valides.

Justification : les preuves données pour le cas des fonctions d'une variable réelle se transposent sans difficulté.

b) différentiabilité

Rappel Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $z_0 \in \mathbb{C}$ $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est diff. en z_0 ssi $\exists\, dg(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire telle que $g(z) = g(z_0) + dg(z_0)\cdot(z - z_0) + |z - z_0|\,\varepsilon(z - z_0)$

avec $\varepsilon(z - z_0) \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$.

Proposition Toute fonction holomorphe est différentiable. on a de plus

$$f \in \mathcal{O}(\mathcal{D}) \Rightarrow \quad df(z_0)\cdot h = f'(z_0)\cdot h \quad \text{pour } z_0 \in \mathcal{D}\ h \in \mathbb{C}.$$

Preuve : conséquence immediate des définitions.

En particulier $df(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

c) formes différentielles

Lemme : Soit $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire alors il existe un unique couple $(\varphi ; \psi)$ d'applications $\mathbb{C}$-linéaires telles que

$$\phi = \varphi + \overline{\psi} \qquad (*)$$

Preuve : $n = 1$ pour simplifier.

Toute application de la forme $(*)$ est $\mathbb{R}$-linéaire

Soient φ, ψ $\mathbb{C}$-linéaire on a alors $\varphi(z) = a \cdot z$ $\psi(z) = b \cdot z$ $a, b \in \mathbb{C}$

si $\varphi = \overline{\psi}$ on a $\forall z$ $az = \overline{b}\cdot\overline{z}$ $z = 1 \Rightarrow a = \overline{b}$

$z = i \Rightarrow a = -\overline{b}$

$\Rightarrow a = -a \Rightarrow a = 0$ $b = 0$

Soit $H = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} ; \mathbb{C})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des applications $\mathbb{C}$-linéaires

$\overline{H} = \{\overline{\psi} \mid \psi \in H\}$ verifie donc $H \cap \overline{H} = \{0\}$

Comme $H \cong \mathbb{C}$ $\dim_{\mathbb{R}} H = \dim_{\mathbb{R}} \overline{H} = 2$ $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} ; \mathbb{C}) = 4$

on deduit $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} ; \mathbb{C}) \simeq H \oplus \overline{H}$.

Remarques. $\chi \in \overline{H} \iff \chi$ $\mathbb{R}$-lin et $\chi(az) = \overline{a}\,\chi(z)$ ie χ antilinéaire

Def $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ouvert $E^1(\mathcal{D})$ l'ensemble des applications de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} ; \mathbb{C})$ est un espace vectoriel complexe des 1-formes différentielles sur $\mathcal{D}$.

Si $\psi \in E^1(\mathcal{D})$ on définit $\overline{\psi}$ par $\overline{\psi}_{z_0}(v) = \overline{\psi_{z_0}(v)}$.

Soit $E^{1,0}(U) \subset E^1(U)$ l'ensemble des applications de Ω dans $H = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$

On a $$E^1(U) = E^{1,0}(U) \oplus \overline{E^{1,0}(U)} \quad (**) \qquad \overline{E^{1,0}} \overset{\text{def}}{=} E^{0,1}$$

Soit $f \in E^0(U)$ l'algèbre des fonctions de Ω à val. dans $\mathbb{C}$ et $\psi \in E^1(U)$

on définit $f.\psi$ par $(f.\psi)_{z_0}(v) = f(z_0)\,\psi_{z_0}(v)$

$(**)$ est une somme directe de $E^0(U)$-modules.

Si g est une fonction différentiable sur Ω $dg \in E^1(U)$

~~On pose~~

<u>Prop</u> $f \in \mathcal{O}(\Omega) \iff f$ diff. et $df \in E^{1,0}(U)$

<u>Exemple</u> Les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes:

$$x : \begin{pmatrix} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto x = \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix} \qquad y : \begin{pmatrix} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto y = \mathrm{Im}(z) \end{pmatrix}$$

$$z : \begin{pmatrix} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longrightarrow z \end{pmatrix} \qquad \bar{z} : \begin{pmatrix} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \bar{z} \end{pmatrix}$$

sont $\mathbb{R}$-linéaires, donc diff. sur $\mathbb{C}$.

Pour $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert on note $dx, dy, dz, d\bar{z}$ la différentielle de leur restriction à U. Ce sont 4 formes différentielles <u>constantes</u> (ie l'applict $U \longmapsto \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ est constante).

<u>Formules</u>:

$$dz = dx + i\,dy \qquad d\bar{z} = dx - i\,dy$$

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \qquad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$

d) Opérateur de Cauchy-Riemann

Proposition Soit f différentiable dans U on a

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z} dz}_{\in E^{1,0}(U)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}}_{\in E^{0,1}(U)}$$

où
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Preuve

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dz + d\bar{z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right) d\bar{z} \qquad \square.$$

Prop $f \in \Omega \iff f$ diff et $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (***).

Terminologie ~~on note~~ L'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ est appelé opérateur de Cauchy-Riemann et (***) est appelée équation de Cauchy-Riemann.

Remarque. On note $\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \in E^{0,1}(U)$ $\bar{\partial} f$ est la projection sur $E^{0,1}$ de df dans (**).

~~e) Équations de Cauchy-Riemann~~

e) <u>aplication aux fonctions harmoniques.</u>

Posons $f = u + i \cdot v$ $\quad u = Re(f) \quad v = Im(f) \quad \Omega \to \mathbb{R}$

f diff $\Rightarrow$ u et v diff.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 & (I) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0. & (II) \end{cases}$$

<u>Corollaire</u> si $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ $\quad u$ et v vérifie:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v = 0.$$

Les fonctions anlées par $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, le laplacien, sont apelées fonctions harmoniques.

<u>Preuve:</u>

$\frac{\partial}{\partial x}(I)$ $\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}(II)$ $\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}(I) + \frac{\partial}{\partial y}(II)$: $\Delta u = 0$. $\square$.