

Chapitre IV : Cohomologie de Dolbeault.

1) Ouverts de \mathbb{C} .

a) approximation d'un compact par des compacts réguliers

Théorème. Soit $K \subset S$ un compact d'une suff. de \mathbb{R} . Il existe alors $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'ouverts relativement compacts telle que $\bigcap_n \Omega_n = K$ et $\overline{\Omega_n}$ a un bord régulier

Preuve. Le lemme de Sard assure que si $f \in C^\infty(S; \mathbb{R})$, $f(\text{Crit}(f))$ est un ensemble de mesure de l'ellogie nulle.
Par suite si $f \in C^\infty(S; \mathbb{R}_+)$ vérifie $f^{-1}(0) = \emptyset$ et $f=1$ sur le complémentaire de K' un compact contenant K pour $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\varepsilon_n \notin f(\text{Crit}(f))$

$\Omega_n = f^{-1}([-\varepsilon_n, \varepsilon_n])$ conviendra. On est ramené à construire f .

• Soit U_1, \dots, U_N un recouvrement ouvert de K par des ouverts de cartes et $U_{N+1} = S \setminus K$.

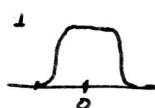
Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_{N+1}$ une partition de l'unité subordonnée à U_1, \dots, U_{N+1}

si $\varphi_i \in C_0^\infty(U_i; \mathbb{R}_+)$ vérifie $\varphi_i^{-1}(0) = K \cap \text{Supp}(\varphi_i) \subset \subset U_i$
 $\frac{\parallel}{\{ \varphi_i \neq 0 \}}$

$f = \sum_{i=1}^N \varphi_i \cdot f_i + \varphi_{N+1}$ convient manifestement.

• on est ramené à $S = U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et même au cas $U = \mathbb{C}$.

~~Si $f \in C^\infty(S)$~~ introduisons
 $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ avec $\rho \geq 0$
 $\int \rho = 1$



$$\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{vérifie}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N} \quad \exists M_\alpha > 0 \quad \int_{\mathbb{C}} |\partial^\alpha \rho_\varepsilon| \leq M_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}$$

On pose maintenant $\bar{\Phi}_m^{(2)} = \text{dist}(z; \{w \in \mathbb{C}, d(z, w) \leq \frac{1}{m}\})$ $\varphi_n = \max(1, \bar{\Phi}_n)$
 φ_n est continue et vérifie $\varphi_n^{-1}(0) = \{w \in \mathbb{C}, \text{dist}(z, w) \leq \frac{1}{n}\}$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\sup_{|z| \leq n} M_n} \quad \frac{\rho_1}{m+1} * \varphi_m \quad / \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\sup_{|z| \leq n} M_n}$$

convient, de toute évidence.
 $* = \text{convolution}$

b) formule de Cauchy pour les ouverts de \mathbb{C} à bord régulier

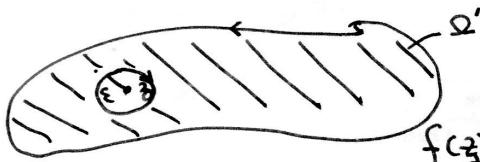
Prop: Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert et $\Omega' \subset \Omega$ un ouvert à bord régulier

$$\forall z \in \Omega' \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega'} \frac{f(w) dw}{w - z}.$$

Preuve:

$w \in \frac{f(w) dw}{2\pi i (w - z)}$ est une 1,0 forme holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$. Elle est fermée.
donc pour tout $\Omega'' \subset \Omega \setminus \{z\}$ à bord régulier $\int_{\partial \Omega''} w = 0$.

avec $\Omega'' =$



on conclut que

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}(z, \varepsilon)} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(w) dw}{(w - z)} = \int_{\partial \Omega'} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(w) dw}{w - z}$$

c) théorème de Runge.

Thm Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $K \subset \Omega$ un compact $\mathcal{O}(K) = \lim_{U \ni K} \mathcal{O}(U)$; muni de $\sup_{z \in K} \|f(z)\|_{\infty}$

Si ~~unie~~ ^{horizontale} composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$, ne contient pas l'infini, contient un point de $\partial \Omega$ alors $\mathcal{O}(\Omega)$ est dense dans $(\mathcal{O}(K); \|\cdot\|_{\infty})$

Preuve: le dual de $(\mathcal{O}(K); \|\cdot\|_{\infty})$ est formé de mesures de Radon complexes μ

soit μ telle que $\mu|_{\mathcal{O}(\Omega)} = 0$ soit $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \int_K f(z) d\mu(z) = 0$.

Pour $z \notin \Omega$ on a $F_{\mu}(z) = \int_{\partial K} \frac{d\mu(s)}{z - s} = 0$ si $z \rightarrow \infty$ $F_{\mu}(z) \rightarrow 0$.

Mais $F_{\mu} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$. La condition de Runge implique $F_{\mu} = 0$ sur $\mathbb{C} \setminus K$.

(noter que si $z \notin \Omega$ $\frac{\partial F_{\mu}}{\partial z^{\alpha}} = \int_{\partial K} \frac{d\mu(s)}{(z - s)^{\alpha}} = 0$)

Soit $K \subset U \subset \Omega$

soit $K \subset \Omega'$ $\Omega' \subset \Omega$ à bord régulier soit $f \in \mathcal{O}(U)$ et $\Omega' \subset \Omega_n \subseteq U$ Ω_n compact à bord régulier

$$\text{si } z \in K \quad f(z) = \int_{\partial \Omega_n} \frac{f(w) dz}{z - w}$$

$$\text{donc } \int_K f(\zeta) d\mu(\zeta) = \int_{b\bar{\Omega}_n} \frac{f(z)}{z} \int_K \frac{g(\zeta)}{z-\zeta} \frac{d\mu(\zeta)}{z-\zeta} d\mu(z) = 0$$

d) annulation de la cohomologie de Dolbeault d'un ouvert de \mathbb{C} .

Lemme: Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $g \in C_0^\infty(\Omega)$. il existe alors $f \in C^0(\Omega)$ tel que $\bar{\partial}f = g(z) dz$, f étant donnée par

$$f(z) = c \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta+z)}{\zeta} \frac{i}{z} d\zeta d\bar{\zeta}$$

Preuve: tout d'abord $\frac{1}{z}$ est L^2_{loc} / mesure de l'énergie.
donc $f \in C^\infty(\mathbb{C})$. Calculons $\bar{\partial}f$.

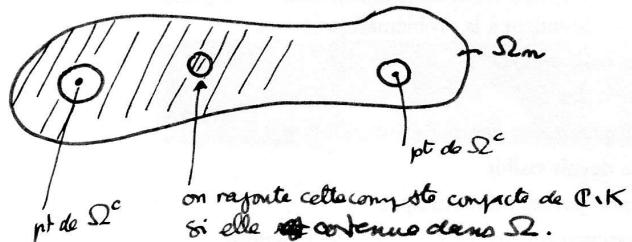
$$\begin{aligned} \bar{\partial}f(z) &= c \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta+z) \frac{i}{2} d\zeta d\bar{\zeta} \\ &= c \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{1}{\zeta-z} \frac{i}{2} d\zeta d\bar{\zeta} \\ &= c \int_{\mathbb{C} \setminus \{z\}} \frac{\partial g(\zeta) \frac{1}{\zeta-z}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{i}{2} d\zeta d\bar{\zeta} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} c \int_{|\zeta-z|>\varepsilon} -d \left(\frac{i}{2} g(\zeta) \frac{1}{\zeta-z} d\zeta \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} c \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{i}{2} \frac{g(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \\ &= g(z) \quad \text{si } c = -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Prop: Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert $g \in C_0^\infty(\Omega)$. il existe alors $f \in C^0(\Omega)$ tel que $\bar{\partial}f = g$.

preuve :

soit (Ω_n) une suite d'ouverts relativement compacts réguliers

$\cup \Omega_n = \Omega$. On peut supposer que Ω_n vérifie la propriété de Runge vis à vis de Ω quitte à remplacer Ω_n par Ω'_n comme ci-dessous



et $\Omega_n \subset \subset \Omega_{n+1}$.

soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = 1$ et g_n est à support dans $\Omega_{n+2} - \overline{\Omega}_n$

on peut résoudre $\bar{\partial} f_n = \varphi_n g$

en part. $f_n \in \mathcal{O}(\overline{\Omega}_n)$.

soit $\psi_n \in \mathcal{O}(\overline{\Omega}_n)$ tq $f_n - \psi_n = f'_n$ vérifie $\|f'_n\|_{\infty, \overline{\Omega}_n} \leq 2^{-n}$.

$\bar{\partial} f'_n = \varphi_n g$. $f = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge uniformément sur les compacts

et à p.c.r une suite Ω_n c'est à p.c.r une série de fonctions holomorphes
⇒ convergence C^∞ sur les compacts. $\bar{\partial} f = g$. fin construction.

Corollaire la cohomologie de Dolbeault de Ω c'est à dire la coh. du complexe

$$C^0(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} E_{C^0}^{0,1}(\Omega)$$

$$\text{et } H_{Dol}^0(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega) \quad H_{Dol}^1(\Omega) = 0 = \text{Coker } \bar{\partial}.$$

Corollaire

soit S une SR. le complexe de Dolbeault faisceautique

$$E_S^0 \xrightarrow{\bar{\partial}} E_S^{0,1}$$

$$\text{vérifie } \text{Ker } \bar{\partial} = \mathcal{O}_S \quad \text{Coker } \bar{\partial} = 0.$$

(e) lien avec la cohomologie de Čech.

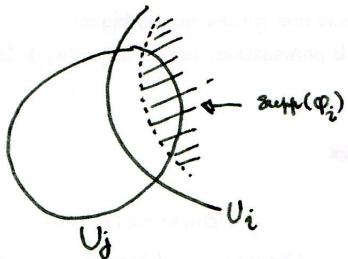
Thm B $\Omega \subset \mathbb{C}$ $H^1(\Omega, \mathcal{O}) = 0$.

Preuve: • Soit \mathcal{U} un rec. ouvert de Ω . et, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{O}) \quad \text{ie: } f_{ij} \in \mathcal{O}(U_{ij}) \\ f_{ij} + f_{jik} + f_{iki} = 0.$$

Soit $(\varphi_i)_{i \in I}$ une part. de l'unité subordonnée à (U_i)

- $f_j^* = \sum_{i \in I} \varphi_i \cdot f_{ij}$
- \cap
- $C^\infty(U_j)$
- ↑
on prolonge ceci par zéro
de $U_i \cap U_j$ à U_j



- 1) $f_j^* - f_k^* = \sum_i \varphi_i (f_{ij} - f_{ik}) = - \sum_i \varphi_i f_{jik} = - f_{jik}$
 $(\partial(f_j^*)) = -(f_{jik}) \text{ dans } C^1(\mathcal{U}; C^\infty)$

- 2) $\bar{\partial} f_j^* = \sum_i f_{ij} \bar{\partial} \varphi_i$
 $\bar{\partial} f_j^* - \bar{\partial} f_k^* = \sum_i (f_{ij} - f_{ik}) \bar{\partial} \varphi_i = \sum_i f_{jik} \bar{\partial} \varphi_i = - f_{jik} \sum_i \bar{\partial} \varphi_i = 0$

donc $\exists g \in C^{0,1}(\Omega)$ $g|_{U_j} = \bar{\partial} f_j^*$

- 3) Soit $f^* \in C^\infty(\Omega)$ $\bar{\partial} f^* = g$.

$$f_j = -f_j^* + g \quad f_j \in C^\infty(U_j) \text{ et } \bar{\partial} f_j = 0$$

- donc $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$ de plus $\partial((f_j)) = (f_{jik}) \text{ dans } C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$

Nous avons construit une cochaîne de degré 0 dont le cobord est (f_{ij}) .

preuve (2) pour $\check{H}^1(S, G)$ si $(U_i)_{i \in I}$ est tel que U_i ouvert de C et $\check{H}^1(U_{ij}, G) = 0$ et $\check{H}^1(U_i, G) = H^1(S, G)$

si $(f_{ij}) \in \mathcal{O}(U_{ij})$ vérifie $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$ ie $(f) \in Z^1(U, G)$

on construit $f_j^* = \sum f_{ij} \varphi_i$ et

$(\bar{\partial} f_j^*)_{j \in I}$ se recolle en $g \in E^{0,1}(S)$ par le calcul

de la preuve du thm 1

D'où une application $Z^1(U, G) \xrightarrow{w} E^{0,1}(S)$

$$\text{si } f_{ij} = f_j - f_i \quad f_j^* = \sum_i (f_j - f_i) \varphi_i = f_j - \underbrace{\sum_i f_i \varphi_i}_{= \varphi}$$

$$\text{et } \bar{\partial} f_j^* = \bar{\partial} \varphi. \quad w(Z^1(U, G)) \subset \boxed{E^{0,1}(S)}$$

D'où une application bijective: $\check{H}^1(U, G) \xrightarrow{\check{w}'} H_{\text{dcl}}^1(S)$.

Si (U_i) est tel que U_i ouvert de C et $\check{H}^1(U_{ij}, G) = 0$
 donc $\check{H}^1(U, G) = H^1(S, G)$. (Loray).

Le raisonnement du thm 1 établit que l'application \check{w}' est injective
 Pour la surjectivité. Soit $w \in E^{0,1}(S)$ on prend $df_j^* = w$ sur U_j (ouvert de C).

et $f_{ij} = f_j^* - f_i^*$ vérifie $w(f_{ij}) = w$.

3) Surfaces de Riemann compactes.

a) Cas de \mathbb{P}^1 .

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}_1 \cup \mathbb{C}_2$ recouvert ouvert et de \mathbb{P}^1 les ouverts de \mathbb{C} .

on a $H^1(\mathbb{P}^1, G) = \check{H}^1(U, G)$

de complexe du Cech de \mathcal{U} est

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(C) \times \mathcal{O}(C) & \longrightarrow & \mathcal{O}(C^*) \\ f(z) \quad g(w) & \longmapsto & f(z) \cdot g(\frac{1}{z}) \end{array} \right)$$

$$\text{si } \varphi \in \mathcal{O}(C^*) \quad \varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

Serie de Laurent convergente

$$\text{et } \varphi = \underbrace{\sum_{n \geq 0} a_n z^n}_{f(z)} - \underbrace{\sum_{n < 0} a_n z^n}_{g(\frac{1}{z})} \quad \text{donc } \varphi = 0 \text{ dans } H^1(\mathcal{U}, G)$$

Prop $H^1(P, G) = 0$.

Corollaire: On peut résoudre le problème de ML sur P^1 pour toute donnée de ML.

b). Genre d'une surface de Riemann compacte.

Thm: S SR compacte. $H^1(S, G)$ est un espace de dimension finie

Déf $g(S) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S)$.

La preuve du théorème est assez longue et nécessite d'amples préparatifs.

Première étape (théorème de Montel)

Prop Soit $K \subset \overline{\mathbb{D}}$ un compact dans un surf. de Riemann S

$$\mathcal{O}(K) = \bigcup_{K \subset U} \text{Im}(\mathcal{O}(U) \rightarrow C^0(K))$$

$\overline{\mathcal{O}(K)} = \text{l'adhérence de } \mathcal{O}(K) \text{ dans } (C^0(K), \| \cdot \|_K) \quad \| f \|_K = \max_{x \in K} |f(x)|$.
 $(\overline{\mathcal{O}(K)}, \| \cdot \|_K)$ est alors un espace de Banach.

Soit $K \subset \mathbb{D}$ un ouvert rel. cpt de T

$\overline{\mathcal{O}(K)} \xrightarrow{\mathcal{E}_K^U} \overline{\mathcal{O}(T)}$ est alors une application compacte (ie: l'image de la boule unité est compacte).

Preuve: Soit $K \subset \mathbb{D} \subset U$ un autre ouvert rel. compact.

alors tout point $w \in \overline{V}$ a la propriété d'avoir un voisinage de carte $U_w \subset U$

$$(U_w, \varphi) \quad \varphi(U_w) = \Delta(0, 1). \quad \varphi(0) = 0$$

Par Cauchy ~~max~~ $|f'(z)| \leq \sup_{z \in \Delta(0, 1)} |f(z)|$ si $f \in \mathcal{O}(\overline{\Delta(0, 1)})$.

En part. si $f \in \mathcal{F}$

En part. si $f \in B(\overline{O(0)}, 1)$

for \mathbb{Q} -lipschitz sur $\Delta(0,1) \setminus \Delta(0, \frac{1}{2})$

et f Cone $\bigcup_{v \in V} U_v = \bar{V}$ on peut extraire une famille f_i i_1, \dots, i_N
 $V \subset \bigcup_{i=1}^N z_i^{-1}(\Delta(0, \frac{1}{2}))$ et ~~on a~~ $f \in B(\overline{O(0)}, 1) \subset C^0(\bar{V}; \mathbb{C})$ une famille
équicontinue c'est à dire:

~~les~~

Lemme: Soit \mathcal{F} une famille de fonctions continues sur un espace métrique
compact K ~~et fermé~~ lisse:

- \mathcal{F} est équicontinue cad. $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall f \in \mathcal{F} \forall (x, y) \in K \quad d(x, y) < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$
 $\exists M > 0 \forall f \in \mathcal{F} \sup_{x \in K} |f(x)| \leq M$
- $\overline{\mathcal{F}}$ est compact dans $C^0(K), \| \cdot \|_K$

Donc $B(\overline{O(0)}, 1) \hookrightarrow C^0(K)$

~~les~~ $f \in B(\overline{O(0)}, 1)$ donne alors des flots équivalents
dans $B(C^0(z_i^{-1}(\Delta(0, \frac{1}{2})))$, donc \mathcal{F} compact
et de toute sorte des f_i (f_i) on peut en extraire
 f_{i_k} convergeant dans $C^0(z_i^{-1}(\Delta(0, \frac{1}{2})))$, donc
dans $O(\bar{V})$.

Seconde étape (topologisation de $H^*(S, G)$)

Soit $\mathcal{U}(x)$

pour pas on choisit (U, z) au cte $z(p)=1 \quad z_p(U)=\Delta(0, 1)$.

$\bigcup_{p \in S} z_p^{-1}(\Delta(0, \frac{1}{2})) = S$ et on peut trouer p_1, \dots, p_n tq $\bigcup_{i=1}^n z_{p_i}^{-1}(\Delta(0, \frac{1}{2})) = S$

On dispose alors de $\mathcal{U}(x) = (U_i)_{i=1 \dots n}$ des récts ouverts de S

lau avec $U_i = z_{p_i}^{-1}(\Delta(0, r))$.

on dispose de:

$$\stackrel{\circ}{\pi}(6): C^0(U(r); G) \xrightarrow{\partial_r} C^1(U(r); G) \xrightarrow{\partial_r} C^2(U(r); G) \quad e_{rr}^0(6) \rightarrow C_r^0(G) \text{ si } r > r'$$

et $\frac{\text{Ker } \partial_r}{\text{Im } \partial_r} \cong H^1(S, G)$ (car $H^1(U_i, G) = 0$ si $U_i \cap U_j = \emptyset$ — le lemme de Leray —)

de plus si $r > r'$ $U(r) \subset U(r')$ à la restriction.

$$H^1(C_r^0(G)) \xrightarrow{\cong} H^1(C_{r'}^0(G)) \quad \text{qui est un isomorphisme.}$$

~~et~~ $\overline{C_r^0} = C^0(\overline{U(r)}, G) = \bigoplus_i \overline{G(U_i(r))}$ norme $\|\cdot\|_r = \sup \| \cdot \|_{U_i(r)}$

~~et~~ $\overline{C_r^1} = \Omega(\overline{U(r)}, G) = \bigoplus_{i,j} G(U_i \cap U_j(r))$

$\delta: \overline{C_r^0} \rightarrow \overline{C_r^1}$

lemme: Si $r < r$ $\gamma \in C^0(\overline{U(r)}, G)$ alors ~~$\gamma = \gamma_r + \gamma_{r'}$~~

$$\|\gamma\|_r \leq \|\delta\gamma\|_r + \|\gamma\|_r$$

soit $\exists i \in \mathbb{N}_i(r) \exists j_0 \exists z \in U_{j_0}(r)$

$$\gamma_i(z) = \gamma_i(z) - \gamma_{j_0}(z) + \gamma_{j_0}(z)$$

$$|\gamma_i(z)| \leq \|\gamma\|_r + \|\delta\gamma\|_r$$

$$\overline{Z_r^0} = \text{Ker } \delta: \overline{C_r^0} \rightarrow \overline{C_r^1}$$

$$\overline{B_r^1} = \delta(\overline{C_r^0}) \subset \overline{C_r^1}$$

on a: pour $r > r'$ la factorisation

$$H^1(C_r^0(G)) \rightarrow \overline{H}_{r'}^1 \rightarrow H^1(C_{r'}^0(G))$$

$$\overline{H}_{r'}^1 \xrightarrow{\cong} H^1(C_{r'}^0(G)) \text{ et donc surjective car } H^1(C_r^0(G)) \rightarrow H^1(C_{r'}^0(G)) \text{ est surjective.}$$

$$\overline{H}_{r'}^1 \rightarrow H^1(C_{r'}^0(G)) \text{ est injective.}$$

$$\text{En effet si } f_{ij} \in \overline{Z}_{r'}^1 \text{ vérifie } f_{ij} = \delta\gamma \quad \gamma \in C^0(U(r); G)$$

$$\text{la preuve du lemme montre } \|\gamma\|_r \leq \|\gamma\|_{r'} + \|\gamma\|_r \text{ pour } r < r'$$

$$\text{et donc } \gamma \in \overline{C_r^0}$$

(noter que $\bar{\Delta}(0, r) \subset \Delta(0, 1)$ vérifie la propriété de l'angle
et alors on a $\gamma = \sum_i f_{ij} \gamma_{ij}$ avec $\gamma_{ij} \in \overline{C_r^0}$ $f_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\|\gamma_{ij}\|_{r'}}$

$$\|\gamma\|_r \leq \|\delta\gamma\|_r + \|\gamma\|_r$$

$$\text{Donc } \widehat{H^1_r} \cong H^1(S, \mathcal{O})$$

[On a réalisé $H^1(S, \mathcal{O})$ comme cohomologie d'un complexe

$$\widehat{C}_r^0 \rightarrow \widehat{C}_r^1 \rightarrow \widehat{C}_r^2 \quad \text{d'espaces de Banach}].$$

• Etape 3

\widehat{B}_r^1 est fermé pour tout $1 > r \geq \frac{1}{2}$. Si $r' > r$ on a

~~Soit $f \in \widehat{B}_r^1$ et $f_m \in \widehat{B}_r^0$ tel que $f = \delta f_m$~~

~~$f_m \in \widehat{B}_r^0$ dans H^0 et $f_m \rightarrow f_n$ dans \widehat{C}_r^0 avec $f_{n,m} \in C_r^0$~~

~~alors $\exists f'_m \in \widehat{B}_r^0$ tel que $f'_m \rightarrow f$.~~

$$|f'_m|_r \leq |\delta f'_m|$$

$$\text{En fait } |\delta f'_m|$$

$$\widehat{C}_r^0 \rightarrow \widehat{C}_r^1 \quad B_r^1 = \delta C_r^0$$

pour $N \in \mathbb{N}$ $\widehat{C}_r^0(N) = \overline{\{f_i \in \mathcal{O}(\bar{\Delta}(0, r)) \mid f_i^{(0)}(0) = f_i^{(1)}(0) = \dots = f^{(N)}(0)\}}.$

$\widehat{C}_r^0(N) \subset \widehat{C}_r^0$ est un sous espace fermé de codimension finie

$$\begin{aligned} \text{si } r' < r \quad f \in \overline{\widehat{C}_r^0(N)} \quad \text{on a} \quad |f|_r &\leq |\delta f|_r + |f|_{r'} \\ &\leq |\delta f|_r + \left(\frac{r'}{r}\right)^N |f|_r \\ &\quad (\text{Cauchy pour } \frac{1}{\sum N}) \end{aligned}$$

$$\text{si } N, r' \text{ t.q. } \left(\frac{r}{r'}\right)^N < \frac{1}{2} \quad \forall f \in \overline{\widehat{C}_r^0(N)} \quad \frac{1}{2} |f|_r \leq |\delta f|_r$$

et $\overline{\delta C_r^0(N)} \subseteq Z_r^1$ est fermé.

comme $\overline{\delta C_r^0(N)}$ est de codimension finie dans δC_r^0 il suit que $\overline{\delta C_r^0}$

est fermé $\|\varphi\|_N$ est une norme $= \inf_{f \in \varphi + \overline{\delta C_r^0(N)}} \|f\|$ est une norme sur $Z_r^1 / \overline{\delta C_r^0(N)}$ qui est un Banach.

□

$\delta C_n / \overline{\delta C_n^0(N)}$ est alors un sous espace vectoriel de dimension finie de $Z'_n / \overline{\delta C_n^0(N)}$, $\| \cdot \|$.

$\| \cdot \|_{\delta C_n / \overline{\delta C_n^0(N)}}$ est une norme qui définit la topologie naturelle de $\delta C_n / \overline{\delta C_n^0(N)}$. Par suite si $f_i \in \delta C_n / \overline{\delta C_n^0(N)}$ converge vers $f \in Z'_n / \overline{\delta C_n^0(N)}$ pour $\| \cdot \|$, (f_i) converge vers $f \in \delta C_n / \overline{\delta C_n^0(N)}$,

$f \in Z'_n / \overline{\delta C_n^0(N)}$ pour $\| \cdot \|$. (f_i) est donc Cauchy dans

$\delta C_n / \overline{\delta C_n^0(N)}$, et donc converge, et donc $f \in \delta C_n / \overline{\delta C_n^0(N)}$

Donc $\delta C_n / \overline{\delta C_n^0(N)}$ est fermé dans $Z'_n / \overline{\delta C_n^0(N)}$ et, par suite :

$\delta C_n = B'_n \subset Z'_n$ est fermé.

• Etape 4 $H_n^1 = Z_n^1 / \overline{B_n^1}$ est donc un espace de Banach pour $\| \cdot \|_n$.

La réducte $H_n^1 \xrightarrow{P_{n,n'}} H_n^1$ est un isomorphisme continu, qui de plus pour $n' < n$ par l'étape 1 est une application compacte (la boule unité de H_n^1 a image néocompacte.)

Mais $P_{n,n'}^{-1}$ est continue (une iso continue est bi continue) et la boule unité de H_n^1 ne contient pas un multiple de celle de H_n^1 . Donc cette boule unité de H_n^1 est compacte

Donc H_n^1 est de dimension finie. \square .

(c) applications.

Thm: Soit S une surface de Riemann compacte. Alors $\text{M}(S) \neq \mathbb{C}$.

Preuve: L'espace des données de Mittag-Leffler $H^0(S, \mathcal{M}/G)$ est de dimension infinie par suite de l'application d'obstruction $H^0(S; \mathcal{M}/G) \xrightarrow{\delta} H^1(S, G)$ au noyau de dimension infinie. donc ~~cet espace est isomorphe~~ à son noyau $\text{Ker } \delta \cong \mathcal{M}(S)/_{\text{non}} = \text{M}(S)/_{\text{non}}$.

Plus précisément: $\forall p \in S \exists f \in \mathcal{M}(S) \text{ tq } f \in \mathcal{O}(S-p)$ et
 f a un pôle d'ordre $\leq g(S)+1$.

Soit z une coord. locale tq $z(p)=\infty$.

Les données de ML $\sum_{i=1}^{g+1} a_i z^{-i}$ sont un espace de dimension $g+1$.

Rappelons que $\mathcal{M}(S) = \mathrm{Hd}^*(S, \mathbb{P}')$

Corollaire Prop.

• Soit S compacte et $f: S \rightarrow \mathbb{P}'$ une application holomorphe.

T compacte
et convexe
alors $\exists DCT$ fini tq $f: S \setminus f^{-1}(D) \rightarrow T \setminus D$ revêt à un tore fini de feuilllets.

.. si $g \in \mathcal{M}(S)$ et g holomorphe sur $S \setminus f^{-1}(D)$ alors la fonction

$a_k: T \setminus D \rightarrow \mathbb{C}$ définit par

$$a_k(z) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d}^{(-1)^k} g(w_{i_1}) \dots g(w_{i_k}) \quad \text{avec } \pi'(z) = \{w_1, \dots, w_d\}$$

est holomorphe sur $T \setminus D$, méromorphe sur T et

$$\text{on a } g^d + a_k(g)g^{d-1} + \dots + a_1(g) = 0.$$

.. si S connexe

$\mathcal{M}(T) \subset \mathcal{M}(S)$ est une extension du corps des degrés finis

Preuve . ~~on~~ déjà été vue

.. Soit $U \subset T \setminus D$ tq $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^d U_i$ avec $f_i: U_i \xrightarrow{f} U$ un isomorphisme

$$\text{alors } a_k = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} g \circ f_{i_1}^{-1} \dots g \circ f_{i_k}^{-1} \quad (\text{no dépend pas de l'ordre sur les } w_i).$$

Si $p \in D \cap T$ et $\Delta \simeq \Delta$ est un voisinage de p dans T

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i \quad \text{et} \quad f: (\Delta_i \simeq \Delta \longrightarrow \Delta) \xrightarrow{\quad \text{et} \quad} (\Delta \longrightarrow \mathbb{G}^m)$$

Définition: la somme $\sum_{p \in D} \sum_{q \in f^{-1}(p)} m_q \cdot q \in \mathbb{Z}S$ est le diviseur de ramification de P .

comme g mème ~~golfi~~ $g|_{\Delta_i}$ vérifie $|g(w)| \leq C|w|^d$.
 $|g(w_{i_1})| \leq C|z|^{d/n_i}$

$$\Rightarrow |a_k| \leq C' |z|^M \quad M \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow a_k \in \mathcal{M}(\Gamma).$$

ooo si S connexe $\mathcal{M}(S)$ corps et $\begin{pmatrix} \mathcal{M}(\Gamma) & \rightarrow & \mathcal{M}(S) \\ \Phi & \longrightarrow & \Phi \circ f \end{pmatrix}$ est une inclusion
 tq $\forall g \in \mathcal{M}(S)$ g est racine d'un poly de degré
~~d~~ sur $\mathcal{M}(\Gamma)$. (ici n'importe quel $\dim_{\mathcal{M}(S)} \mathcal{M}(\Gamma) \leq d$. ~~car tous~~)

Cor S surf. de R. connexe. Alors S est la SR d'une fonction algébrique

Preuve Soit $\Phi \in \mathcal{M}(S)$ $\exists: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ donne une inclu de degré f
 $C(X) = \mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathcal{M}(S)$. Par le th de l'élet primitif $\exists w \in \mathcal{M}(S)$
 tq $C(X)[w] = \mathcal{M}(S)$. On a $w \in \overline{C(X)}$ et ~~w~~ $\Rightarrow g$ est la fonction SR
 de w (ce qui montrerait une preuve détaillée au lecteur).