

III. Calcul intégral sur les surfaces de Riemann

1) 1- formes différentielles

- lemme: Soit V un \mathbb{C} -espace de dim finie et $\overset{\text{Im}}{V_R} \subset V$ vu comme espace vectoriel réel

$$\mathcal{L}_R(V_R; \mathbb{C}) \cong V^* \oplus \overline{V^*} \quad V^* = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V; \mathbb{C})$$

Preuve: Une forme linéaire $w \in V^*$ est \mathbb{C} -linéaire si V est \mathbb{C} , donc elle est \mathbb{R} -linéaire à priori.

Par ailleurs ($\bar{w}: V \longrightarrow \mathbb{C}, v \mapsto \overline{w(v)}$) est \mathbb{R} -linéaire car complexe est \mathbb{R} -linéaire. Donc V^* et $\overline{V^*}$ sont des sous espaces vectoriels complexes de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V_R; \mathbb{C})$. Si \bar{w} complexe a. $\bar{w} = \overline{aw}$ la dimension complexe de V^* est n , donc sa dim réelle est $2n$. Et comme $w \mapsto \bar{w}$ donne un isomorphisme de \mathbb{R} -espace $\dim_{\mathbb{R}} V^* = \dim_{\mathbb{R}} \overline{V^*} = 2n$.

$\dim_{\mathbb{R}} V_R = 2n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_R(V_R; \mathbb{C}) = 4n$.

$\overline{V^*} = \{\varphi: V \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) \quad \varphi(\lambda v) = \bar{\lambda} \varphi(v) \quad \forall v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Soit $\varphi \in V^* \cap \overline{V^*}$ et $v \in V$.

$$\begin{aligned} \varphi(iv) &= i \cdot \varphi(v) \quad \text{car } \varphi \in V^* \\ \varphi(iv) &= -i \varphi(v) \quad \text{car } \varphi \in \overline{V^*} \end{aligned} \Rightarrow \varphi(v) = 0. \quad \text{donc } V^* \cap \overline{V^*} = \{0\}.$$

- Déf $\Omega \subset V$ un ouvert. Une 1-forme différentielle complexe est une application de Ω à valeurs dans $\mathcal{L}_R(V_R; \mathbb{C})$. On note $E_{C^\infty}^1(\Omega)$ module sur $C^\infty(\Omega)$

Ex si $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \quad df \in E_{C^\infty}^1(\Omega)$

Rem C^∞ peut être remplacé par C^k , etc...

Déf Une 1-forme diff est dite de type $(1,0)$ si $\forall p \in \Omega \quad \omega(p) \in V^*$ On note $E_{C^\infty}^{1,0}(\Omega)$

Lemme: $E_{C^\infty}^1(\Omega) = E_{C^\infty}^{1,0} \oplus E_{C^\infty}^{0,1}(\Omega)$ comme C^∞ modules

Ex $V = \mathbb{C}^n$ coordonnées z^1, \dots, z^n ces coordonnées sont des applications C^∞ dz^1, \dots, dz^n leur différentielle est une application (constante) $\Omega \rightarrow V$ donc $dz^1, \dots, dz^n \in E_{C^\infty}^{1,0}(\Omega)$.

Par ailleurs leurs conjugées $\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n$ on des diff $d\bar{z}^1, \dots, d\bar{z}^n \in E_{C^\infty}^{0,1}(\Omega)$.

Def $f \in C^\infty(\Omega)$ on pose $df = df + \bar{d}f$ pour la décomposition de df comme somme d'une forme de type $(1,0)$ et d'une forme de type $(0,1)$.

Ex m=1

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad dz = dx + idy \quad d\bar{z} = dx - idy$$

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \quad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$

$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}.$$

not.

$$= \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

- Definition Une 1-forme C^∞ sur une surface de Riemann S est la donnée pour toute carte (U, z) d'une forme différentielle sur $\mathbb{C}(U)$ de la forme $\omega^z dz + \bar{\omega}^{\bar{z}} d\bar{z}$ où $\omega^z, \bar{\omega}^{\bar{z}} \in C^\infty(\mathbb{C}(U); \mathbb{C})$ et si (V, w) est une autre carte et $\psi = z \circ w^{-1} : \mathbb{C}(U \cap V) \rightarrow \mathbb{C}(V \cap U)$ on a

$$\begin{cases} \omega^w = \omega^z \circ \psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial w}. \\ \bar{\omega}^{\bar{w}} = \bar{\omega}^{\bar{z}} \circ \psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{w}} \end{cases}$$

une telle 1-forme est de type $(1,0)$ si $\omega^{\bar{z}} = 0$, de type $0,1$ si $\omega^z = 0$.

Notation $E_{C^\infty}^1(S) = E_{C^\infty}^{1,0}(S) \oplus E_{C^\infty}^{0,1}(S)$ comme $C^\infty(S)$ -modules.

Remarque Notant $\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial \bar{w}}$ ceci devient:

$$\omega^w dw + \bar{\omega}^{\bar{w}} d\bar{w} = \omega^z(z(w)) \frac{\partial z}{\partial w} dw + \bar{\omega}^{\bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}} d\bar{w}$$

Exemple: Si $f \in C^\infty(S)$ $f \circ z^{-1} \in C^\infty(\mathbb{C}(U))$ et $d(f \circ z^{-1}) \in E_{C^\infty}^1(\mathbb{C}(U))$. Fait: (ceci définit $df \in E_{C^\infty}^1(S)$)
(exercice très recommandé)

• On dispose alors d'opérateurs

$$d : C^\infty(S) \rightarrow E_{C^\infty}^1(S)$$

$$\bar{\partial} : C^\infty(S) \rightarrow E_{C^\infty}^{0,1}(S)$$

$$\partial : C^\infty(S) \rightarrow E_{C^\infty}^{1,0}(S).$$

$\text{Ker}(d) =$ fonctions loc. constantes sur S

$\text{Ker}(\bar{\partial}) =$ fonctions holomorphes sur S .

2) Formes différentielles sur un ouvert de \mathbb{R}^m

- Lemma: Soit E un \mathbb{R} -espace de dim finie e_1, \dots, e_n une base e_1^*, \dots, e_n^* la base duals.

$\Lambda^p E^* = \{\text{formes multilinéaires alternées } E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}\}$ a pour base
 $\{e_I^*\}_{I \in \mathcal{P}_p(n)}$ $I \in \mathcal{P}_p(n) \iff I \text{ partie de } \{1, \dots, n\} \text{ de cardinal } p$

e_I^* défini par : $e_I^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 0 \quad \text{si } \{j_1, \dots, j_p\} \neq I$
 $e_I^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \text{sign}(i_1, \dots, i_p) \quad \text{si } \{j_1, \dots, j_p\} = I = \{i_1 < \dots < i_p\}$

Preuve: $\forall p \in \Lambda^p E^*, p \geq 2, \quad \omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0 \quad \text{car } \omega(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\omega(\dots, w, \dots, v, \dots)$
 $\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \text{sign}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_p)$

$$\delta = \omega - \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e_{\{i_1, \dots, i_p\}}^*$$

$\delta \in \Lambda^p E^*$ et vérifie $\delta(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = 0 \quad \forall i_1 < \dots < i_p$

$$\text{Si } v_k = \sum_{i_k} \lambda_{k i_k} e_i$$

$$\delta(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \prod_{k=1}^p \lambda_{k i_k} \delta(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \stackrel{!}{=} 0.$$

$$\text{Donc } \delta = 0 \text{ et } \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e_I^*$$

La famille $\{e_I^*\}$ est génératrice.

Pour voir que la famille est libre on utilise $e_{n+1} : \Lambda^p E^* \rightarrow \Lambda^{p-1}(E^*)$ l'appl. linéaire définie par

$$e_{n+1} \omega(v_1, \dots, v_{p-1}) = \omega(e_{n+1}, v_1, \dots, v_{p-1})$$

et on note que $e_{n+1} e_I^* = \pm e_{I \setminus \{n+1\}}^* \quad (0 \text{ si } k \notin I)$ dans un raisonnement par récurrence sur p .

Ex: $n=p=\dim E \quad \text{R } e_{1, \dots, n}^* = \Lambda^p E^* \quad \text{et } e_{1, \dots, n}^* = \det_{(e_1, \dots, e_n)}(v_1, \dots, v_n)$

Proposition: On définit sur $\bigoplus \Lambda^p E^*$ une loi d'algèbre associative graduée-commutative en posant

$$e_I^* \wedge e_J^* = \sum_{\sigma} e_{I \cup J}^*$$

avec $e_{IJ} = 0$ si $I \cap J \neq \emptyset$

$$e_{IJ} = \text{sign} \left(\begin{smallmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p & j_1, \dots, j_q \\ k_1, \dots, k_{p+q} \end{smallmatrix} \right)$$

$$I = \{i_1 < \dots < i_p\}$$

$$J = \{j_1 < \dots < j_q\}$$

$$J \cup K = \{k_1 < \dots < k_{p+q}\}$$

La loi \wedge est indépendante de la base choisie

Réponse: gradué-commutatif signifie

$$\forall \omega \in \Lambda^p E^* \quad \forall \omega' \in \Lambda^q E^*$$

$$\omega \wedge \omega' = (-1)^{p+q} \omega' \wedge \omega.$$

Preuve: exercice recommandé. L'indépendance vis à vis du choix de la base est un point crucial.

- Def $\Omega \subset E$ un ouvert une p -forme diff sur E est une application C^∞ de Ω dans $\Lambda^p E^*$.

$E_{C^\infty}^p(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ module libre de rang $\binom{n}{p}$. $\bigoplus_p E_{C^\infty}^p(\Omega) = E^\bullet(\Omega)$ algèbre graduée-commutati

$$\text{Ex: } f \in E_{C^\infty}^0(\Omega) \Leftrightarrow f \in C^\infty(\Omega)$$

$$df \in E_{C^\infty}^1(\Omega).$$

Problème: $d: E^0 \rightarrow E^1$ peut être étendue de manière unique à $d: E^\bullet \rightarrow E^\bullet$ t.q

$$- d E_{C^\infty}^p(\Omega) \subset E_{C^\infty}^{p+1}(\Omega)$$

$$- d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^{\deg(\omega)} \omega \wedge d\omega'$$

On a alors $d^2 = d \circ d = 0$ et

$$E_{C^\infty}^0(\Omega) \xrightarrow{d} E_{C^\infty}^1(\Omega) \xrightarrow{d} \dots \text{ est un complexe}$$

Preuve $E = \mathbb{R}^n$. Une base de $E_{C^\infty}^{p+1}(\Omega)$ est donnée par

$$dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$$

(si (e_i) est la base canonique de \mathbb{R}^n)

$$dx^I: \Omega \rightarrow \bigoplus \mathbb{R}^{n*}$$

est l'application constante de valeur e_I^*)

$$\omega \in E_{C^\infty}^{p+1} \quad \omega = \sum_I f_I dx^I \quad f_I \in C^\infty(\Omega)$$

On doit définir

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge dx^I$$

car on doit avoir $d(dx^I) = 0$.

Il se trouve que cette définition marche, grâce à des vérifications continues mais interminables.

(un excellent traitement est dans

Gillet, Hulin, Lafontaine, Riemannian Geometry, Springer)

□

3) Formes différentielles sur les surfaces de Riemann.

Déf Une 2-forme C^∞ sur une surface de Riemann S est la donnée pour toute carte (U, z) d'une 2-forme sur $z(U) \subset \mathbb{C}^2$ de la forme

$$\omega^{z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z}$$

telle que si (V, w) est une autre carte et $\psi = z \circ w^{-1}$

$$\omega^{w\bar{w}} = \omega^{z\bar{z}} \circ \psi \cdot \left| \frac{\partial z}{\partial w} \right|^2$$

Not $E_{C^\infty}^2(S) (= E_{C^\infty}^{1,1}(S))$

Rem On a $\omega^{w\bar{w}} dw d\bar{w} = \omega^{z\bar{z}} \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}} dz d\bar{z} = \omega^{z\bar{z}} dz d\bar{z}$

Prop: On dispose d'un complexe $E_{C^\infty}^0(S) \xrightarrow{d} E_{C^\infty}^1(S) \xrightarrow{d} E_{C^\infty}^2(S)$

Preuve: $d\omega^{z\bar{z}} = \frac{\partial \omega^z}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial \omega^{\bar{z}}}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} - \left(\frac{\partial \omega^z}{\partial z} - \frac{\partial \omega^{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}$
 $= \bar{\partial} \omega^z dz + \partial \omega^{\bar{z}} d\bar{z}$
 si $\omega = \omega^z dz$ est de type 1,0 on a $d(\omega^z dz) = \frac{\partial \omega^z}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$.

Si $\omega^w = \omega^z \circ \psi \frac{\partial z}{\partial w}$ $\frac{\partial \omega^w}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial \omega^z}{\partial w} \circ \psi \cdot \frac{\partial z}{\partial \bar{w}} = \left(\frac{\partial \omega^z}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}} + \frac{\partial \omega^z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \bar{w}} \right) \frac{\partial z}{\partial \bar{w}}$

$$\frac{\partial \omega^w}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial \omega^z}{\partial z} \left| \frac{\partial z}{\partial w} \right|^2 \quad \text{donc } d\omega \text{ est bien une 2-forme.}$$

si $\omega = \omega^z dz \bar{z}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^w}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} \left(\omega^z \psi \cdot \overline{\frac{\partial z}{\partial w}} \right) \\ &= \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial}{\partial w} (\omega^z \psi) = \left(\frac{\partial \omega^z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial \omega^z}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial w} \right) \frac{\partial z}{\partial w} \\ &= \frac{\partial \omega^z}{\partial z} \cdot \left| \frac{\partial z}{\partial w} \right|^2 \end{aligned}$$

donc $d\omega$ est bien une 2-forme. \square .

Réponse: Soit $\omega \in E^1(S)$ et $\gamma: I \rightarrow S$ une arc C^∞ ($I = \text{intervalle réel}$)

tel que $\gamma(I) \subset U \cap V$ où U, V sont deux ouverts de S

Poisons ~~alors~~ $\int_{\gamma}^w(\omega) = \int_I \left(\omega^z(z \circ \gamma(t)) \gamma'(t) + \omega^{\bar{z}}(\bar{z} \circ \gamma(t)) \overline{(\bar{z}' \circ \gamma)}(t) \right) dt = \int_I \omega^z dz + \omega^{\bar{z}} d\bar{z}$

Alors

$$(1) \quad \int_{\gamma}^w(\omega) = \int_w^{\gamma}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} \omega$$

$$(2) \quad \text{si } \gamma: J \rightarrow I \text{ } C^1\text{-croissante} \quad \int_{\gamma \circ \varphi}^w \omega = \int_{\gamma}^w \omega$$

Déf: donc le (1) permet de définir $\int_{\gamma}^w \omega$ même si $\gamma(I) \notin U$
et la propriété (2) implique que $\int_{\gamma}^w \omega$ ne dépend que de
l'image de l'arc γ et de son orientation.

Preuve:

$$\begin{aligned} \omega^w(w \circ \gamma)(w \circ \gamma') dt &= \\ &\omega^z(z \circ \gamma) \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{d(w \circ \gamma)}{dt} dt \\ &= \omega^z(z \circ \gamma) \frac{d(z \circ \gamma)}{dt} dt. \end{aligned}$$

Lemme: Soit $\Omega \in E^2(S)$ et $(U; z)(V, w)$ deux ouverts de carte de S .
On suppose $\text{Supp}(\Omega) \subset U \cap V$

Alors $I_z(\Omega) = \int_{z(U \cap V)} \frac{i}{2} \omega^{z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = \int_{z(U)} \omega^{z\bar{z}} d\lambda(z)$ $\lambda = \text{le bâton}$

Alors: $I_z(\Omega) = I_w(\Omega)$

Preuve: on a $\frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = dx \wedge dy$.

$$I_w(\Omega) = \int_{w(U \cap V)} \frac{i}{2} \omega^{w\bar{w}} dw \wedge d\bar{w} = \int_{w(\Omega') \cap (z(U \cap V))} \omega^{z\bar{z}} \circ \psi \cdot \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 dz$$

Si $\psi: \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega'$ holomorphe $d\psi = \psi' dz$ ie $\text{Jac}(\psi) = \begin{pmatrix} \text{Re } \psi'(z) & -\text{Im } \psi'(z) \\ \text{Im } \psi'(z) & \text{Re } \psi'(z) \end{pmatrix}$
donc $\det \text{Jac}(\psi) = \text{Re}^2 + \text{Im}^2 = |\psi'(z)|^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} I_w(\Omega) &= \int_{\psi(z(U \cap V))} \omega^{z\bar{z}} \circ \psi \cdot |\det \text{Jac}(\psi)| dz \\ &= \int_{z(U \cap V)} \omega^{z\bar{z}} dz \quad \text{par la formule de changement de variable.} \\ &\quad \text{dans les intégrales multiples.} \end{aligned}$$

Déf: le (1) permet de définir $\int_S \Omega$ si Ω est à support compact.

4) Formule de Stokes Déf: notion de surf. de R. à bord

Théorème: Soit S une surface de Riemann et $\Omega \subset S$ un ouvert tq $\bar{\Omega}$ compact et
 $b\Omega = \bar{\Omega} - \Omega = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$ où γ_i soit l'image ^{difféomorphie} d'un cercle S^1 .

et $b\Omega$ orienté comme suit:



(ie la direction tangente positive de γ_i est telle que (d, ν) est directe avec $\nu =$ la normale extérieure)

Soit $\omega \in E_{C^\infty}(S)$

$$\int_{b\Omega} \omega = \int_S d\omega.$$



$$\int \underline{\partial f} = -f(0)$$

Preuve: Soit $(U_i)_{i=1}^N$ un recouvrement ouvert par des ouverts de cartes de $\bar{\Omega}$, qu'on suppose fini.

Lemme: Il existe alors $(\varphi_i)_{i=1}^N$ des fonctions réelles C^∞ sur U_i telle

$$-\varphi_i \in C_0^\infty(U_i)$$

$$-\sum_{i=1}^N \varphi_i = 1. \quad (\text{Existence d'une partition de l'unité}).$$

Preuve du lemme: En effet on peut trouver $U'_i \subset U_i$ avec $\partial U'_i = \bar{\Omega}$ et

$\psi_i \in C^\infty(U_i)$ avec $\psi_i > 0$ sur U'_i et $\psi_i = 0$ près de ∂U_i

$$\varphi_i = \frac{\psi_i}{\sum \psi_i} \text{ convient } \square.$$

$$\int_{b\Omega} \omega = \sum_{i=1}^N \int_{b\Omega} \varphi_i \omega$$

$$\int_{\Omega} d(\omega) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} d(\varphi_i \omega).$$

On est ramené au cas où $S = \{ \text{un ouvert de } \mathbb{C} \}$. Le théorème dépend alors de la formule de Green.

Or on a plus généralement $\forall \omega \in E^{m-1}(\mathbb{R}^m)$

$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^m$ ouvert à frontière régulière ($\Omega = \{ \psi < 0 \}$ avec $\text{crit}(\psi) \cap \Omega = \emptyset$)

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{b\Omega} \omega \quad (\text{orientation "naturelle" sur } \Omega).$$

Corollaire. Si $\omega \in E^k(S)$ est à support compact $\int_S d\omega = 0$.

Remarque: Plus généralement on peut définir des p -formes diff sur une variété diff M si M orientée (les cartes de cartes ont un jacobien > 0) $\int_M \omega$ si $\omega \in \Omega^{\dim(M)}$. La formule de Stokes s'écrit dans ce cas de gènèralité. $M = \mathbb{R}^2$ formule de Green. $M = \mathbb{R}^3$ formule d'Ostrogradski.

Def (φ_i) comme dans le lemme s'appelle une partition de l'unité surdéfinie à $(U_i)_{i=1}^N$

Remarque. M espace topologique. M paracompact $\Leftrightarrow \forall \mathcal{U} = (U_a)_{a \in A}$ un recouvrement ouvert il existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tq \mathcal{V} localement fini $\Leftrightarrow \forall \mathcal{U} = (U_a)_{a \in A} \exists (V_a)_{a \in A} \quad \varphi_a \in C_0^\infty(U_a)$ $\sum_a \varphi_a = 1$ (somme loc finie)