

Chapitre VI Cohomologie de De Rham et Théorème d'Abel - Jacobi

1) Lien entre cohomologie de De Rham et cohomologie de Dolbeault

a) suite exacte fondamentale

Résumé:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \circ \text{ surf. de Riemann} & & \text{le disque} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & \circ & \rightarrow & C^{\infty}(S) & \xrightarrow{\sim} & C^{\infty}(S) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow d & & \downarrow \bar{\partial} \\
 0 & \rightarrow & E^{0,0}(S) & \rightarrow & E^1(S) & \rightarrow & E^{0,1}(S) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow d & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & E^{1,0}(S) & \xrightarrow{\sim} & E^{2,0}(S) & \rightarrow & \circ \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \circ & & \circ & & \circ
 \end{array}$$

Definit une suite exacte courte de complexes

$$0 \rightarrow \text{Dolb}^0(S; \Omega^1) \rightarrow \text{DR}^0(S) \rightarrow \text{Dolb}^0(S, \circ) \rightarrow 0.$$

Corollaire: On a un tel de cohomologie

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^0 & & & & \\
 0 & \rightarrow & H_{\text{DR}}^0(S) & \rightarrow & H^0(S, \mathcal{O}_S) \xrightarrow{\partial} & H^0(S, \Omega_S^1) & \rightarrow H_{\text{DR}}^1(S) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) \\
 & & \text{z} & & \text{z} & & \downarrow \\
 & & \text{fonctions loc} & & \text{fonctions holo} & & H^1(S; \Omega_S^1) \\
 & & \text{constantes sur} & & \text{sur } S & & \downarrow \\
 & & S & & & & H_{\text{DR}}^2(S; \circ) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & 0.
 \end{array}$$

b) applications

Corollaire: Si $S \cong \Omega$ ouvert de \mathbb{C} .

$$H_{\text{DR}}^2(\mathbb{C}) = 0, \quad \frac{H^0(S, \Omega_S^1)}{\partial \cdot \mathcal{O}(S)} \cong H_{\text{DR}}^1(\mathbb{C})$$

Preuve: si Ω est splt c'axe $H_{\text{DR}}^1(\mathbb{C}) = 0$

$\left(\begin{array}{c} \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}}^1 \\ f \mapsto f dz \end{array} \right)$ est un isomorphisme. et $H_{\text{DR}}^1(\mathbb{C}) = 0$ si Ω splt c'axe car c'est donc qu'une fonction holomorphe sur un domaine splt connexe a une primitive holomorphe

Corollaire:

Si S surf. de Riemann la suite de faisceaux sites est exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{C}_S \rightarrow \mathcal{E}_S^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_S^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_S^2 \rightarrow 0$$

Preuve: on se ramène au cas local où $\Omega = \Delta$.

Corollaire

$$H_{DR}^i(S, \mathbb{C}) \cong H^i(S, \mathbb{C}).$$

Corollaire Si S est une surface de Riemann compacte connexe

(1) $H^0(S; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(S, \Omega_S^1) \rightarrow H^1(S; \mathbb{C}) \xrightarrow{K} H^1(S, \mathcal{O}_S) \rightarrow 0$$

$$(*) \dim H^1(S, \mathbb{C}) = b_1(S) = 2g(S)$$

$$(**) H^2(S; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}.$$

Proposition

$$H^1(S; \mathbb{C}) \cong H^0(S, \Omega_S^1) \oplus \overline{H^0(S, \Omega_S^1)}$$

$$\text{Si } (\alpha, \beta) \in Z_{DR}^1 \text{ on pose } (d, \beta) = \int_S \alpha \wedge \beta$$

alors (\cdot, \cdot) descend à une forme alternée non dégénérée sur $H^1(S, \mathbb{C})$ vérifiant $i(\omega, \bar{\omega}) > 0$ pour $\omega \in H^0(S, \Omega_S^1)$.

Preuve:

- désigne la conjugaison complexe. Noter que $H^1(S, \mathbb{R}) \cong H_{DR}^1(S) \oplus H_{DR}^1(S)$ et un sous-espace réel de $H^1(S, \mathbb{C})$.
 • le fait que (α, β) descend à $H^1(S, \mathbb{C})$ découle du fait que

$$\text{Si } d \in Z_{DR}^1 \quad \gamma \in \mathcal{C}_{DR}^\infty \quad (d, d\gamma) = \int_S d \wedge d\gamma = \int_S d(\alpha \wedge \gamma) = 0$$

$$\bullet i(\omega, \bar{\omega}) = \int_S |\omega|^2 i dz \wedge d\bar{z} > 0.$$

$$(\omega, \omega) = \int_S \omega \wedge \omega = \int_S 0 = 0 \quad \text{donc } H^0(S, \Omega_S^1) \cap \overline{H^0(S, \Omega_S^1)} = \{0\}.$$

~~est alternée.~~

2) application Théorème d'Abel-Jacobi

a) Cohomologie à coefficients entiers.

Soit \mathbb{Z} ~~un anneau~~
Lemme:

Soit K un corps de caractéristique $\neq 0$ et

$C^\bullet = \dots \rightarrow C^i \xrightarrow{d} C^{i+1} \rightarrow \dots$ un complexe de groupes abéliens de type fini

$$H^i(C^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} K) \cong H^i(C^\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} K.$$

On se ramène à $\mathbb{Q} = K$ en notant que $(\cdot \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} K \cong (\cdot \otimes_{\mathbb{Z}} K)$. (car K a une \mathbb{Q} -base)

on a un morph. naturel ds ce sens $H^i(C^\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow H^i(C^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$.

Soit $c \in Z^i(C^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ $dc = 0$ car $C^i = \mathbb{Z}^n \oplus \text{Tors.}$

$\exists m \in \mathbb{Z}$ $mc \in C^\bullet$
 et $d(mc) = 0$.

d'où le fait que ce morphisme est surjectif.

Comme ce ~~est~~ est un morphisme de \mathbb{Q} -espaces vect. de dim finie...

Corollaire $H^i(S, \underline{K}_S) \cong H^i(S; \underline{\mathbb{Z}}_S) \otimes_{\mathbb{Z}} K$ et H^0

Admis: les grds $H^1(S; \underline{\mathbb{Z}}_S)$ et $H^2(S; \underline{\mathbb{Z}}_S)$ sont sans torsion

Corollaire donc $H^1(S; \underline{\mathbb{Z}}_S) \cong \mathbb{Z}^{2g}$

$H^2(S; \underline{\mathbb{Z}}_S) \cong \mathbb{Z}$.

(b) Suite exacte exponentielle

S&R

Lemme: On a une suite exacte courte de faisceaux sur S

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}_S \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S^* \rightarrow 0$$

$$f \mapsto \exp(2\pi i f)$$

Corollaire. On dispose d'une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & & & & & \\
 \downarrow & & & & & & \\
 H^1(S, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(S, \mathcal{O}_S) & \longrightarrow & H^1(S, \mathcal{O}_S^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \end{array}
 \end{array}$$

Preuve: En effet $H^2(S, \mathcal{O}) = H^2_{Dol}(S) = 0$.

et en degré 0 en 0

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp(2i\pi \cdot)} \mathbb{C}^* \rightarrow 0 \text{ d'où}$$

l'injectivité de $H^1(S; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$.

Remarque on obtient aussi $H^1(S; \mathcal{O}_S^*) \xrightarrow{\delta} H^2(S, \mathbb{Z})$. Ceci vaut pour S une \mathbb{C}^∞ variété C^∞ arbitraire $\delta = c_1(L)$ 1^{ère} classe de Chern de L .

Remarque: la morph $H^1(S; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$ ici construit n'est autre que le composé

$$H^1(S; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S; \mathbb{C}) \xrightarrow{\kappa} H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \rightarrow 0.$$

c) degré

Proposition

Présumé Soit $c \in H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$ et $L \simeq \mathcal{O}_S(D)$ une fibré en droite holomorphe tel que c est la classe de l'isomorphisme de L alors $\text{deg } D = \delta c$.

~~Pre~~ Soit $g = g_{ij} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C}^*)$

$$g_{ij} = \exp(2\pi i \varphi_{ij})$$

$$\mathcal{C}^1(U, \mathbb{C}^*) \longrightarrow \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C}^*) \longrightarrow \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C}^*)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \partial \\
 \mathcal{C}^2(U, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{C}^2(U, \mathbb{C}).$$

$$\varphi_{ij} - \varphi_{ik} + \varphi_{il} = \partial(\varphi_{ij})$$

$$\mathbb{N} \\
 \mathbb{Z}$$

$\psi_{ijk} = \varphi_{ij} - \varphi_{ik} + \varphi_{il}$ est la classe de $\partial(g_{ij}) \in H^2(\mathbb{R}^j; \mathbb{Z})$.

il suffit de voir $\text{deg } D = 0 \Rightarrow \delta c = 0$

et alors $\text{deg } D = 0 \Rightarrow \mathcal{O}_S(D)$ est trivial comme fibré en droite

C^∞

Donc on est ramené à voir si $D \geq 0, D' \geq 0 \text{ deg } D = \text{deg } D' \Rightarrow \mathcal{O}_S(D)$

et $\mathcal{O}_S(D')$ sont C^∞ immerses.

- or

Soit $D \in \text{Div}(S)$ et D' un autre diviseur
 D et D' sont "proches"

d) Théorème d'Abel.

Théorème:



$$\left(\begin{array}{l} S \longrightarrow \begin{array}{l} H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \\ H^1(S, \mathcal{O}_S) \cong H^0(S, \Omega_S^1)^* \\ H^1(S, \mathbb{Z}) \end{array} \\ P \longmapsto [O(P - P_0)] = \omega \mapsto \int_{P_0}^P \omega \end{array} \right)$$

est une cpl. holo de S dans $\text{Jac}(S) = \begin{array}{l} H^0(S, \Omega_S^1)^* \cong \mathbb{C}^g \\ H^1(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^g \end{array}$

$$D = P_1 + \dots + P_r - P_0 - \dots - P_r' \iff \sum_{i=0}^r \int_{P_i}^{\omega} \omega = 0 \iff O(D) \cong 0$$

$$\iff \exists f \in \mathcal{M}(S) \text{ div}(f) = D.$$