Chapitre V

Théorème de Riemann-Roch.

1) Fibrés vectoriels, Fibrés vectoriels holomorphes.

(a) définition

Déf Soit S une surface de Riemann. Une variété complexe, muni d'une application holomorphe $\pi : V \longrightarrow S$ est un fibré vectoriel holomorphe de rang r

- $\forall s \in S$ $\pi^{-1}(s)$ espace vectoriel
- S a un revêtement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ $\pi_i^{-1}(U_i) \simeq \mathbb{C}^r \times U_i$ et

$$\begin{tikzcd} \pi_i^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\theta_i"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & \mathbb{C}_i^r \times U_i \arrow[dl, "pr_{U_i}"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

$\forall s \in U_i$ $\theta_i|_{\pi^{-1}(s)} \longrightarrow \mathbb{C}^r$ isomorphisme d'espace vectoriel

- $\mathbb{C}_j^r \times U_{ij} \xrightarrow{\theta_i \circ \theta_j^{-1}} \mathbb{C}_i^r \times U_{ij}$ est de la forme

$$(v, z) \longmapsto (g_{ij}(z) v ; z) \qquad \text{avec } g_{ij} : U_{ij} \longrightarrow GL_r(\mathbb{C}) \text{ holomorphe.}$$

Déf si V est seulement C^∞ et les g_{ij} aussi on parle de fibré vectoriel ($\mathcal{C}^\infty$)

Remarque: On définit fibré vectoriel, réel ou complexe, sur toute variété différentiable
——— holomorphe ——— complexe.

Déf Soit V un fibré vect. holomorphe sur S. Dans la définition, ~~l'ouvert~~ recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ est dit un recouvrement trivialisant de $\pi : V \to S$, et $(\theta_i)_{i\in I}$ est appelé une trivialisation de V ; $(g_{ij})_{ij}$ le cocycle de la trivialisation.

(b) classification

Prop: soit V un fibré vectoriel $g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki} = I_r$ $\forall i,j,k$

de plus si (θ'_i) est une autre trivialisation on a $g'_{ij} = f_i(z)\, g_{ij}(z)\, f_j^{-1}$

avec $f_i \in \prod_i \mathcal{O}(U_i ; GL_r)$

preuve: $g_{ij}\, g_{jk}\, g_{ki} = \theta_i \theta_j^{-1} \theta_j \theta_k^{-1} \theta_k \theta_i^{-1}$

Si θ'_i est une autre tri on doit avoir $\theta'_i = f_i \circ \theta_i$ $f_i \in \mathcal{O}(U_i, GL_n)$

Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites holomorphe de rang 1. On a:

Corollaire ~~Si $r=1$~~ $(g_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ et $g_{ij} = g'_{ij}$ dans $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$.

Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites complexes. On a

$$(g_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U} ; (\mathcal{C}^\infty_S)^*).$$

Prop Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de S et

$(g_{ij}) \in Hol(U_{ij}, GL_r(\mathbb{C})) = GL_r(\mathcal{O}(U_{ij}))$

tq $g_{ij}\, g_{jk}\, g_{ki} = Id_r$

alors il existe un fibré vectoriel $\pi : V \to S$ ayant une trivialisation sur $\mathcal{U}$ de cocycle (g_{ij})

Preuve: Sur $\coprod_{i \in I} \mathbb{C}^r_i \times U_i$ on défini une relat d'eq par

$(V_i, z_i) \sim (V_j, z_j)$ si $z_i = z_j$ dans S et donc ($z_i \in U_i$, $z_j \in U_j$ et $z = w \in U_i \cap U_j$)

et $V_j = g_{ji}(z) V_i$.

le Quotient par cette relat d'equ vérifie les propriété voulues.

~~Thm: $\{$ fibré vectoriel de rang 1 $\}$/isomorphisme~~

Déf V_1, V_2 2 fibrés vectoriels sur S (holomorphes)

$\varphi : V_1 \to V_2$ mpe de fibrés si φ est holomorphe et $\varphi_s : V_{1_s} \to V_{2_s}$ linéaire

Lemme: Soit $\mathcal{U}$ un recouv trivialisant V_1 et V_2 et φ un mpe de fibré

$\theta_{2i} \circ \varphi \circ \theta_{1i}^{-1} \quad U_i \times \mathbb{C}^{r_1} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^{r_2}$ est de la forme

$(V, z) \longrightarrow (M(z) \cdot V, z)$ avec $M \in M_{r_2, r_1}(\mathcal{O}(U_i))$.

Déf Si $r_1 = r_2$ et $M \in GL_r(\mathcal{O}(U_i))$ on dit que φ est un isomorphisme.

Thm I: $\{$ fibré vect. holo de rang 1 $\}$/isom $\xrightarrow{\sim} H^1(S; \mathcal{O}_S^*)$.

$\{$ fibré vectoriel C^∞ de rang 1 $\}$/isom $\xrightarrow{\sim} H^1(S; (\mathcal{C}_S^\infty)^*)$.

Preuve: la surjectivité est claire. Pour l'injectivité on peut supposer $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ trivialisés sur $\mathcal{U}$

et $g_{ij} = g'_{ij} + \delta(f_i) \qquad (f_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$

$\Longrightarrow g'_{ij} = g_{ij}\, f_i \cdot f_j^{-1}$.

On considère alors

$$\bigsqcup_i \mathbb{C}\times U_i \longrightarrow \bigsqcup_i \mathbb{C}\times U_i$$
$$(v, z_i) \xmapsto{\varphi} (f_i(z)v ; z_i)$$

alors $(v,z) \underset{g}{\sim} (v',z') \iff \varphi(v,z) \underset{g'}{\sim} \varphi(v',z')$

en passant au quotient φ donne alors un isomorphisme de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}'$!

Rem: $H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$ $H^1(S, \mathcal{C}_S^{\infty *})$ ont une structure de groupe.

$$I^{-1}(I(\mathcal{L}) + I(\mathcal{L}')) = \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}' \quad \text{(mod isomorphisme)}$$

$$\mathcal{L}\otimes L'_s = L_s \otimes L'_s.$$

Rem: $$H^1(S; GL_r(\mathcal{O}_S)) \overset{def}{=} \frac{\{(g_{ij}) \in GL_r(\mathcal{O}(U_{ij})) \mid g_{ij}\, g_{jk}\, g_{ki} = id\}}{\{(g_{ij}) \sim (f_i\, g_{ij}\, f_j^{-1}) \quad (f_i) \in \prod GL_r(\mathcal{O}(U_i))\}}$$

$$\{\text{fibré vect. holo de rang } r\}/iso \xrightarrow{\sim} H^1(S, GL_r(\mathcal{O}_S)).$$

juste un ensemble pointé, pas de structure de groupe.

(cohomologie non abélienne)

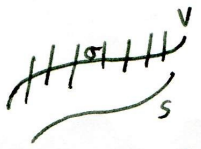
⚠ la cohomologie non abélienne n'existe pas en degré ≥ 2 même si des substituts partiels existent.

2) Faisceau des sections (holomorphes) d'un fibré vectoriel (holomorphe)

(a) définition:

Def Soit $\pi: V \to S$ une fibré vectoriel (holo-pho) $\sigma: S \to V$ (holomorphe) est une section si $\pi\circ\sigma = id_S$.

Ex: $0: s \to 0_{\pi^{-1}(s)}$ est une section holomorphe.



Prop: Pour $U \subset S$ on défini $\mathcal{O}(V)(U) = \{$~~les~~ l'espace des sections holo de $\pi^{-1}(U) \to U\}$ et $V \subset U$ ρ_{VU} = la restriction. $\mathcal{O}(V)$ est un faisceau de $\mathcal{O}_S$-modules ~~des groupes abéliens~~ et $\forall (U \subset S$ tq $\pi^{-1}(U)$ trivial $\mathcal{O}(V)|_U \simeq \mathcal{O}_S^{\oplus r}$

De même posons $\mathcal{C}^\infty(V)(U) = \{\text{sections de } C^\infty \text{ de } \pi^{-1}(U) \to U\}$ définit un faisceau noté $\mathcal{C}^\infty(V)$ qui est le faisceau des sections C^∞ de V et le faisceau est un faisceau de $\mathcal{C}^\infty_S$-modules.

(b) description explicite par cocycle

Proposition: Soit $\pi : V \to S$ un fibré vectoriel (resp. holomorphe), $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de S, $(\theta_i)_{i\in I}$ une trivialisation de V relative à $\mathcal{U}$ $(g_{ij})_{i,j\in I}$ son cocycle. $g_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}; GL_m)$

Une section (resp. holomorphe) de V $s : S \to V$ vérifie que $s_i = \theta_i(s)$ est une application (holomorphe) de U_i dans $\mathbb{C}^n_i$ et

$$s_i|_{U_{ij}} = g_{ij} \cdot s_j|_{U_{ij}}$$

Inversement une collection d'applications $s_i : U_i \to \mathbb{C}^n_i$ telle que

$$s_i = g_{ij}\, s_j \quad \text{sur } U_{ij}$$

se recolle en une section de V, holomorphe si V et les s_i le sont.

Preuve: Ceci résulte du fait que V s'obtient en recollant les $\mathbb{C}^n \times U_i$, $i \in I$ par la relation d'équivalence

$$(v_i; z_i) \sim (v_j; z_j) \quad \text{ssi} \quad z_i = z_j \text{ dans } S \text{ et } v_j = g_{ji}(z)\, v_i$$

(c) exemples fondamentaux

Exemple 1 $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ avec (U_i, z^i) une carte de S

on pose
$$g_{ij}(p) = \frac{\partial z^i}{\partial z^j}(z^j(p)) = \frac{\partial}{\partial z^j}(z^i \circ z^{j-1})(z^j(p)) \qquad p \in U_{ij}$$
$$= \frac{\partial}{\partial z^j}\Phi_{ij}(z^j(p))$$

$$g_{ij}(p)\, g_{jk}(p) = \frac{\partial}{\partial z^k} z^j \circ (z^k)^{-1}(z^k(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial z^j}(z^i \circ z^{j-1})(z^j(p))$$
$$\overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial z^k}(z^i \circ (z^k)^{-1})(z^k(p))$$
$$= g_{ik}(p).$$

Donc $(g_{ij})_{i,j} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}^*)$ est un cocycle, notons T_S le fibré en droites correspondant

de même $(g_{ij}^{-1})_{i,j} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}^*)$ est un autre cocycle, notons T_S^* le fibré ~~vectoriel~~ en droites holomorphe correspondant

si $(\omega_i^*)_{i\in I}$ est une section C^∞ de T_S^* $\quad \omega^i \in C^\infty(U_i;\mathbb{C})$ et

$$\omega_i^*(z^i(p)) = \frac{\partial z^j}{\partial z^i}(p)\,\omega^j(p)$$

ou $\quad \omega_i^* \cdot dz^i = \omega_j^* \cdot dz^j$ dans $E^{1,0}(U_i)$

Donc
$$\mathcal{E}^\infty(T_S^*) = \mathcal{E}^{1,0}$$
$$\mathcal{O}(T_S^*) = \Omega_S^1$$

Pour T_S une section est une famille $(t_i^i)_{i\in I}$ tq

$$t_i^i = \frac{\partial z^i}{\partial z^j}\, t_j^j \qquad \text{ou encore}$$

$$t^i \frac{\partial}{\partial z^i} = t^j \frac{\partial}{\partial z^j} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{\partial z^j}{\partial z^i}\cdot\frac{\partial}{\partial z^j}\right).$$

<u>déf</u> T_S est le fibré tangent holomorphe de S, les ~~sections~~ éléments sont les vecteurs tangents complexes de S.

<u>Rem</u>: Ces constructions ne dépendent pas du choix du recouvrement ouvert pour des raisons sur lesquelles je passerai.

<u>Exemple 2</u>: Soit $D \in \mathbb{Z}_{lf}^S$ un <u>diviseur</u> sur S c'est à dire

$$D = \sum_{d\in|D|} a_d \cdot d \qquad \text{avec } |D| \text{ discret et } a_d \in \mathbb{Z}.$$
$$= \sum_{p\in S} a_D(p)\cdot p.$$

Combinaison linéaire formelle de points de S à coeff. entiers

$$\mathcal{O}_S(D) = \{ f \in \mathcal{M}_S \mid v_d(f) \geq -a_d \}$$

est un sous faisceau de $\mathcal{M}_S$ - Si $D \geq 0$ $\quad \mathcal{O}_S = \mathcal{O}_S(0)$

vérifie $\quad \mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{O}_S(D)$

Si (U, z) est un ouvert de carte tq $U \cap D = p$ $\quad z(p) = 0$ la fonction méromorphe définie sur U

$s_U = z^{-d}$ vérifie $\quad s_U \in \mathcal{O}_U(D)$ et même

$$\begin{pmatrix} f \longmapsto f \cdot s_U \\ \mathcal{O}_U \longmapsto \mathcal{O}_U(D) \end{pmatrix}$$ est un isomorphisme.

Par suite le $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{O}_S(D)$ vérifie $\exists\, \mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$

un rec. de S tq $\quad \mathcal{O}_S(D)_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ (en tant que $\mathcal{O}_{U_i}$-module)

On dit que $\mathcal{O}_S(D)$ est localement libre de rang 1.

<u>Exemple 2'</u> -

Soit $\mathcal{L}$ localement libre de rang 1 et $\mathcal{O}_U \xrightarrow{\sigma_U} \mathcal{L}_U$ des isomorphisme de $\mathcal{O}_U$ module défini pour tout U dans un recouvrement ouvert.

Notar que $\quad \sigma_U(f) = f \cdot \sigma_U(1) \overset{\text{déf}}{=} f\, s_U$ où s_U section trivialisante locale de $\mathcal{L}$ sur U

$g_{VU} = \sigma_V^{-1} \circ \sigma_U$ est un automorphe de $\mathcal{O}_{U \cap V}|_U$ comme module sur lui même

$g_{VU} \in \mathcal{O}^*(U \cap V)$.

$(g_{VU})_{U,V}$ est manifestet un cocycle dans $Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{O}_S^*)$

et définit un <u>fibré</u> en droites $\underline{L}$.

<u>Lemme:</u> $\quad \mathcal{O}_S(L) = \mathcal{L}$

Il suffit de voir qu'une famille $(f_U)_U$ tq $f_V = g_{VU} f_U$ définit une section de $\mathcal{L}$

~~mais $\sigma_V(f_V) = f_V s_U = \sigma_U \circ \sigma_V^{-1}(f_U) \cdot s_U$ -~~

$f_U s_U = \sigma_U(f_U) = \sigma_U(\sigma_U^{-1} \circ \sigma_V(f_V)) = \sigma_V(f_V) = f_V s_V$ comme section de $\mathcal{L}$ sur $U \cap V$.

Donc $(f_U s_U)_U$ définit une section de $\mathcal{L}$ $\square$.

<u>Retour sur l'exemple 2'</u>

$\mathcal{O}_S(D)$ est donc le faisceau des sections holomorphe d'un fibré en droite holomorphe sur S noté $\mathcal{O}_S(D)$.

<u>Remarque</u>: La correspondance

$$\{\text{fibrés en droite holomorphe}\} \longleftrightarrow \{\text{faisceau de } \mathcal{O}_S\text{-module loc. libre de rang 1 sur } S\}$$

est sous entendue dans l'abus de langage ordinaire des géomètres algébriques qui disent souvent "fibré en droite" pour "faisceau loc. libre de rang 1".

Cette construction permet de donner un cocycle explicite pour

$\mathcal{O}_S(D)$

Soit $(U_i)_{i\in I}$ une recouv ouvert et $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ tq

$\forall p \in U_i \quad v_p(f_i) = -a_p$ (f_i est alors une section trivialisante de $\mathcal{O}_S(D)$ sur U_i)

On a $\sigma_{U_i}(1) = f_i$ et $(g_{ij}) = \dfrac{f_i}{f_j} = \sigma_{U_j}^{-1} \circ \sigma_{U_i}$

on a $\forall p \in U_i \quad v_p(f_i) = v_p(f_j)$ ce qui confirme $\forall p \in U_{ij} \quad v_p(g_{ij}) = 0$ ou $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$

Deplus, si $D \geq 0$, $f_i^{-1} \in \mathcal{O}(U_i)$

et $f_j^{-1} = g_{ij}(f_i^{-1})$

$(f_i^{-1})_{i\in I}$ définit donc une section s de $\mathcal{O}_S(D)$

Si on regarde s dans une trivialisant de U_i on a

$\theta_i(s) = \dfrac{1}{f_i}$ et: $v_p(s) = a_d$.

La section s est la seule section de $\mathcal{O}_S(D)$ (à multiplication par un scalaire près) tq $v_p(s) = a_p(s)$ $\forall p \in S$.

on note $s = s_D \in H^0(X; \mathcal{O}_S(D))$ la "section canonique" de $\mathcal{O}_S(D)$.

Ex $\begin{array}{l} S = \mathbb{P}^1 \\ D = n.\infty \end{array}$ $\qquad \mathcal{O}_S(D) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$

On observe que dans l'inclusion $\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{O}_S(D) \subseteq \mathcal{M}_S$ $(D \geq 0)$
s_D est l'image de la fonction 1. (à un scalaire non nul près).

(d) <u>Opérations multilinéaires sur les fibrés vectoriels</u>

une série de définitions, dont la justification detaillée sera omise, doit être donnée :

- V_1 un fibré vectoriel holomorphe de cocycle (g_{ij}). $\qquad g_{ij}$
  V_2 ——————————— (h_{ij})

V_1^* a pour cocycle ${}^t g_{ij}^{-1}$ $\qquad \mathcal{O}_S(V_1^*) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S(V_1); \mathcal{O}_S)$

faisceau associé à
$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S(U)}(\mathcal{O}_S(V_1), \mathcal{O}_S)$
morph. de faisceau

$V_1 \otimes V_2$ $\qquad g_{ij} \otimes h_{ij} \in GL(\mathbb{C}^{rg(V_1)} \otimes \mathbb{C}^{rg(V_2)})$

$$\mathcal{O}_S(V_1 \otimes V_2) = \mathcal{O}_S(V_1) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(V_2)$$

faisceau associé à
$U \mapsto \mathcal{O}_S(V_1)(U) \otimes_{\mathcal{O}_S(U)} \mathcal{O}_S(V_2)$

$V_1^{\otimes a} \otimes V_1^{*\otimes b} \otimes V_2^{\otimes c} \otimes V_2^{*\otimes d}$,
$\Lambda^n V_1$, $S^n V_1$, etc se définissent ....

Noter que $V \otimes \mathcal{O}_S(D)$ est de même rg que V
$\mathcal{O}_S(D) \otimes \mathcal{O}_S(D') = \mathcal{O}_S(D + D')$ ....

- V_1 fibré vect. C^∞ de cocycle g_{ij}, $\bar{V}$ est le fibré de cocycle $\bar{g}_{ij}$

Exemple : $\mathcal{E}^{0,0}_S = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ $\qquad$ $\mathbb{C} = \mathbb{C}\times S \to S$ le fibré trivial

$$\mathcal{E}^{1,0}_S = \mathcal{C}^\infty(T^*_S)$$

$$\mathcal{E}^{0,1}_S = \mathcal{C}^\infty(\overline{T^*_S})$$

$$\mathcal{E}^2_S = \mathcal{E}^{1,1}_S = \mathcal{C}^\infty(T^*_S \otimes \overline{T^*_S})$$

Remarque finale

- Si M est une variété différentiable quelconque

(U_i, φ_i) cartes réelles - $g_{ij} = Jac(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \circ \varphi_j$

définit $g_{ij} \in Z^1(\mathcal{U}; GL_n(\mathcal{C}^\infty))$

le fibré correspondant est TM le fibré tangent de M.

- ~~La relation avec T_S~~ Si M est holomorphe et qu'on regarde des cartes complexes on définit $T^{1,0}M$ un fibré vectoriel holomorphe. Voyant M comme variété diff TM est isomorphe à $T^{1,0}_M$ comme fibré vectoriel réel

et $\quad TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq T^{1,0}_M \oplus T^{0,1}_M = \overline{T^{1,0}_M}$

- ~~$\Lambda^1 M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^*$~~ $\quad$ $M = S$ une surf. de $\mathbb{R}$ $\quad$ $T^{1,0}_M$ ~~est~~ noté T_S dans le texte précédent ...

- de même $\quad T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0*}_M \oplus \overline{T^{1,0*}_M}$

$$= \mathcal{E}^{1,0}_M \oplus \mathcal{E}^{0,1}_M .$$

déf • Une forme diff réelle de degré p sur une variété diff est une section C^∞ de $\Lambda^p T^*_M$ (etc...).

3) Cohomologie de Dolbeault d'un fibré vectoriel.

(a) Complexe de Dolbeault

Thm 1) On a une suite exacte courte de complexe de faisceaux pour $\pi : V \to S$ un fibré vectoriel holomorphe de la forme :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(V) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_S(V) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{0,1}_S(V) \longrightarrow 0$$

avec $\quad \mathcal{E}^{0,1}(V) = \mathcal{C}^\infty_S(V \otimes \overline{T^*_S})$

et $\quad \bar\partial \ (s_i)_{i\in I} = (\bar\partial s_i)_{i\in I}$

si $(s_i)_{i\in I}$ est l'expression de $s \in C^\infty_S(V)$ dans une trivialisation de V.

2)
$$H^0(S; \mathcal{O}_S(V)) = \operatorname{Ker}\bar\partial : C^\infty(S,V) \longrightarrow E^{0,1}_{C^\infty}(S,V)$$
$$H^1(S; \mathcal{O}_S(V)) = \operatorname{Coker}\bar\partial : \qquad "$$

Preuve: 2) $\Rightarrow$ 1) ~~c'est assez sou~~ $\mathcal{C}^\infty_S(V)$ et $\mathcal{E}^{0,1}_S(V)$ sont des faisceaux de $\mathcal{C}^\infty_S$-modules et la preuve du cas $V = \mathbb{C}$ s'adapte sans rien changer

1) $\Rightarrow$ 2) il convient d'observer que si

$$s_i = g_{ij} \cdot s_j \quad \text{avec} \quad g_{ij} \in \mathcal{O}^*$$

$$\bar\partial s_i = \bar\partial g_{ij} \cdot s_j + g_{ij} \bar\partial s_j = g_{ij} \bar\partial s_j$$

on voit ~~aussi~~ que $\bar\partial s_i \in \mathcal{E}^{0,1}(U_i)$ donc

$$(\bar\partial s_i)_{i\in I} \in \mathcal{C}^\infty(E^{0,1} \otimes V)$$

localement l'enoncé se ramène donc au fait que

$$0 \to \mathcal{O}_S^{\oplus r} \to \mathcal{C}^\infty_S{}^{\oplus r} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{0,1}_S{}^{\oplus r} \to 0 \text{ est}$$

exacte ce qui est l'enoncé déja rencontré + somme directe r fois

(b). Théorème de finitude.

Théorème: Soit S une surface de Riemann compacte (et $\pi : V \to S$ un fibré holo). Alors $H^0(S, \mathcal{O}_S(V))$ et $H^1(S, \mathcal{O}_S(V))$ sont des $\mathbb{C}$-vectoriels de dimension finie

Preuve: On fait la même preuve que dans le cas $V = \mathbb{C} \times S$. Bien sur on s'arrange à ce que V soit trivial sur les U_i et aussi $\|h_{ij}\| < \infty$
On a alors un complexe de ~~[illegible]~~ dépendant d'un paramètre

$\frac{1}{2} \leq r \leq 1$

$$\overline{\mathcal{C}^0(\mathcal{U}(r); \mathcal{O}_S(V))} \xrightarrow{\overline{\partial}_r} \overline{\mathcal{C}^1(\mathcal{U}(r); \mathcal{O}_S(V))} \longrightarrow$$

Banach de norme $\|\cdot\|_r$

$H^0(S, \mathcal{O}_S(V)) = \operatorname{Ker} \overline{\partial}_r$ est muni de $\|\cdot\|_r$ et est un Banach

pour $r > r'$ $Z^0_r \to Z^0_{r'}$ est compacte par Montel donc $H^0(S, \mathcal{O}_S(V))$ est un Banach d'identité compacte.

Pour le H^1 la preuve donnée l'autre fois marche avec quoi ~~l'illustration~~ l'inégalité fondamentale modifiée en $\mathcal{R}$

$$\|\gamma\|_r \leq C \|\partial \gamma\|_r + C \|\gamma\|_\rho$$

ce qui suffira largement.

4) Théorème de Riemann-Roch (version cohomologique)

S surf. de Riemann compacte

a) ~~lemme princi~~ Lemme principal

$h^i(S, V) = \dim H^i(S, \mathcal{O}_S(V))$

~~Lemme~~ Def $\pi : V \to S$ S SR compacte $\chi(S, V) = h^0(S, V) - h^1(S, V)$

Lemme 1: Si $\chi(S, V) > 0$ alors $H^0(S, \mathcal{O}_S(V)) \neq 0$

Preuve: En fait $h^0(S, V) \geq \chi(S, V)$

Lemme 2: $\chi(S; V \otimes \mathcal{O}_S(D)) = \chi(S, V) + rg(V) \cdot \deg D$

avec $\deg D = \sum_{p \in S} a_p$ si $D = \sum_{p \in S} a_p \cdot p$.

~~Si~~ $D = \underset{\geq 0}{D^+} - \underset{\leq 0}{D^-}$ $\qquad \deg D = \deg D^+ - \deg D^-$

et la relation suivra du ~~fait~~ cas ≥ 0 $\left(\mathcal{O}_S(D^-) \otimes \mathcal{O}_S(-D) \cong \mathcal{O}_S \right)$

on peut supposer $D^+ \geq 0$.

~~$\mathcal{O}_S(V)\odot$~~

On regarde $0 \to \mathcal{O}_S \xrightarrow{s_D} \mathcal{O}_S(D) \longrightarrow K \longrightarrow 0$ $\quad K_D = \mathrm{coker}(s_D)$

$$K_D \simeq \bigoplus_{p\in S} \mathbb{C}[z]/(z^{a_p}) \cong \bigoplus_{p\in S} \mathbb{C}^{a_p(D)}$$

$\uparrow$

faisceau gratte ciel,
faisceau de C^∞ modules
$\Longrightarrow H^1(K)=0$

~~Donc on a~~ Pour V on a :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(V) \to \mathcal{O}_S(V \otimes \mathcal{O}_S(D^+)) \to \bigoplus_p V_p \otimes \mathbb{C}^{a_p(D)} \to 0$$

$\uparrow$

$H^1 = 0$.

d'où

$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}_S(V)) \to H^0(S, V \otimes \mathcal{O}_S(D)) \to \bigoplus_p V_p \otimes \mathbb{C}^{a_p(D)}$$
$$\hookrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(V)) \longrightarrow H^1(S, V \otimes \mathcal{O}_S(D)) \to 0$$

le lemme 2 résulte du

sous-lemme: Dans une s.e.l $\quad 0 \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^n \to 0$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim E^i = 0$$

Preuve $\quad$ ($n=2$ c'est $\dim E^1 = \underset{\dim \mathrm{Ker}}{\underset{\shortparallel}{\dim E^0}} + \underset{\dim E^1/E^0}{\underset{\shortparallel}{\dim E^2}}$

$n \to n+1$ $\quad$ on utilise les sel

$0 \to E^0 \to \cdots \to E^{n-2} \to$ ~~E^{n-1}~~ $\ker(E^{n-1} \to E^n) \to 0$

~~$0 \to \ker(\quad) \to E^n \to \mathrm{coker}(\quad)$~~ $\to 0$.

et $E^n \cong E^{n-1}/\ker(E^{n-1} \to E^n)$)

b) ~~théorème~~ : applications

Corollaire: Soit $L \to S$ un fibré vectoriel holomorphe. Alors pour $n \gg 0$ et $p \in S$ $L \otimes \mathcal{O}_S(n.p)$ ~~admet~~ a une section.

En effet : $\chi(L \otimes \mathcal{O}_S(np)) = n + \chi(L)$

Corollaire $\exists D \in \mathrm{Div}(S)$ tq $L \cong \mathcal{O}_S(D)$.

Preuve: Supposons que L a une section holo σ.

$v_p(\sigma) = v_p(s_i)$ où s_i expression locale de σ dans une carte trivialisante de L

$$D = \sum_{p \in S} v_p(\sigma) p \quad \text{est un diviseur}$$

$$I_\sigma : \begin{pmatrix} \mathcal{O}_S(L) & \longrightarrow & \mathcal{M}_S \\ \tau & \longmapsto & \tau/\sigma \end{pmatrix}$$ est un morphisme de faisceau. envoyant σ sur 1.

Si z coord locale en p $z^{-d}.\sigma$ section locale de de $\mathcal{O}_S(L)$ tant que $d \leq v_p(\sigma)$. Donc $I_\sigma(\mathcal{O}_S(L)) \overset{!}{=} \mathcal{O}_S(D)$

D est alors positif car $v_p(\sigma) \geq 0$ $\forall p$. le cas général ~~dit que~~ ~~$L \cong \mathcal{O}_S(D)$~~ résulte de $L \otimes \mathcal{O}_S(np) \cong \mathcal{O}_S(D)$ avec $D \geq 0$.

$L \cong \mathcal{O}_S(D - np)$.

c) théorème de Riemann Roch

Thm: Soit S SR compacte connexe D divis. $g = g(S)$

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(D)) - h^1(S, \mathcal{O}_S(D)) = (1-g) + \deg D.$$

Preuve: Pour $D = 0$ $h^0(S, \mathcal{O}_S) = 1$ $h^1(S, \mathcal{O}_S) = g$

En part. si $L \cong \mathcal{O}_S(D) \cong \mathcal{O}_S(D')$ $\deg D = \deg D'$.

Generalisat: $h^0(S, \mathcal{O}_S(V)) - h^1(S, \mathcal{O}_S(V)) = \mathrm{rg}(V)(1-g) + \deg(\Lambda^{\mathrm{top}} V)$.

5) Dualité de Serre: (a) distributions sur une SR

S SR ($E_0^{1,1}(S) = C_0^\infty(T_S^* \otimes \overline{T_S^*})$ est un espace topologique vect. dont la topologie est la topologie engendrée par $\| s \|_{K,k} = \| \theta(s) \|_{C^k(K)}$ on $K \subset\subset U$ et θ triv de $T_S^* \otimes \overline{T_S^*}$ sur U

Déf: L'espace des distributions de S est le dual de $E^{1,1}(S)$. $C^\infty(S) \subset D(S)$ via $f \mapsto \int f\omega$

Lemme : La fonction $\left(z \mapsto \frac{i}{2\pi z}\right)$, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est L^1_{loc} et définit une distribution telle que

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{1}{\pi z}\right) = \delta_0 \qquad \delta_0 = \text{masse de Dirac}$$

~~Preuve : Soit $\varphi \in C_0^\infty$ $\int_{\mathbb{C}} \bar\partial\left(\frac{1}{\pi z} \frac{i}{2\pi} dz d\bar z\right) \overset{def}{=} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi z} \bar\partial \varphi \frac{i}{2\pi}$~~

~~$\overset{def}{=} \int_{\mathbb{C}} \bar\partial \varphi$~~

Preuve : $\varphi \in C_0^\infty$

$$\int_{\mathbb{C}} \varphi \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{1}{\pi z}\right) = -\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar z} \cdot \frac{1}{\pi z} \frac{i\, dz\, d\bar z}{2}$$

$$\left\langle \varphi, \frac{\partial}{\partial x} T \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, T \right\rangle$$

$$= + \int_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} \bar\partial\left(\varphi \frac{1}{\pi z} \wedge \frac{i\, dz}{2}\right) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{C}\setminus\Delta(0,\varepsilon)}$$

$$= \lim - \int_{\Delta(0,\varepsilon)} \varphi \frac{i\, dz}{2\pi z} = \lim \int_{\Delta(0,\varepsilon)} \frac{\varphi(z)\, dz}{2\pi i z}$$

$$= \varphi(0) = \int_{\mathbb{C}} \varphi \cdot \delta_0 .$$

Corollaire : Si E est une distribution à support compact sur $\mathbb{C}$

$$\bar\partial \left(z \mapsto \frac{1}{\pi z}\right) * E = E.$$

En effet si T_1, T_2 2 distrib. T_1 a support compact on definit

$$\int_{\mathbb{C}} \varphi \quad T_1 * T_2 = \int_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} \varphi(x+y)\, T_1(x)\, T_2(y)$$

bien defini car T_1 est à support cpact

autre méthode : Fourier T_1 à support compact $\Rightarrow$ ~~$\hat T_1$ est la restricti~~

$\hat T_1(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} T_1 e^{ix\xi}$ est la restrict à $\mathbb{R}^2$ de $\hat T_1(\zeta) = \int_{\mathbb{C}} T_1 e^{ix\cdot\zeta}$ est donc $\mathbb{R}$-analytique. On peut donc multiplier $\hat T_1$ par $\hat T_2$ et revenir.

~~Il est marqué que tout T_1 est une distribution de temperé.~~

~~Lemme Ker $\bar\partial$: $\mathcal{D}(S) \longrightarrow$~~

Pour V un fibré vectoriel complexe (C^∞) on défini

$$\mathcal{D}(V) = E_0^{1,1}(S, V^*)'$$

$$\mathcal{D}(V \otimes \overline{T}_S^*) \cong E_0^{1,0}(V^*) = \left(C_0^\infty(V^* \otimes T_S^*)\right)'$$

si V holomorphe on peut définir $\bar\partial : \mathcal{D}(V) \longrightarrow \mathcal{D}(V \otimes \overline{T}_S^*)$

<u>Lemme</u>: $\operatorname{Ker} \bar\partial : \mathcal{D}(V) \longrightarrow \mathcal{D}(V \otimes \overline{T}_S^*) = H^0(S, \mathcal{O}(V))$

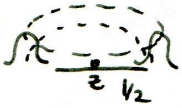
<u>Preuve</u>: si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ verifie $\bar\partial\theta = 0$

alors $\theta = \lim_{\varepsilon \to 0} \theta * \rho_\varepsilon$ $\quad \rho_\varepsilon =$

et $\bar\partial\theta_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} (\bar\partial\theta) * \rho_\varepsilon = 0$

donc θ_ε est holomorphe et $\theta_\varepsilon \longrightarrow \theta$ au sens des distrib.

~~[illegible]~~



$\varphi(r)$ $\int \varphi(r)\, r\,dr\,d\theta = 1$

$|z| < \frac{1}{2}$ $\quad \theta_\varepsilon(z) = \int \frac{\varphi(w)}{2\pi i\, w - z}\, \theta_\varepsilon(w)\, \frac{i}{2}\, dw\, d\bar w$ par Cauchy.

pour $|z| < \frac{1}{4}$ $\quad w \mapsto \frac{\varphi(w)}{w - z}$ est borné en topologie C^∞ et donc

$\exists C \ \forall \varepsilon \quad |\theta_\varepsilon(z)| \leq C.$ ~ Par compacité. $\theta_\varepsilon \to$ fonct holo sur $\Delta(0, 1/4)$ qui est existe

cette fonct holomorphe est θ. Donc θ holomorphe.

~~Lemme Soit S un [illegible] sans compact connexe V holomorphe~~

~~$\bar\partial : \mathcal{D}(V) \longrightarrow \mathcal{D}(V \otimes \overline{T}_S^*)$ est injectif~~

~~Preuve: par dualité ceci revient à voir que~~

~~$\bar\partial = t\bar\partial : C_0^\infty(S; V^* \otimes T_S^*) \longrightarrow C_0^\infty(S; V^* \otimes T_S^* \otimes \overline{T}_S^*)$~~

~~injectif. Mais $\operatorname{Ker} \bar\partial =$ fonctions holo à support compact dans S~~

~~par le principe d'analyticité $\operatorname{Ker} \bar\partial = 0$~~

(b) isomorphisme de Dolbeault distributionnel

$$\frac{\partial}{\partial x}(T_1 * T_2) = T_1 * \frac{\partial}{\partial x} T_2 = \frac{\partial T_2}{\partial x} * T_1$$

$$\bar\partial \left(z \to \frac{1}{\pi z} \right) * E = \delta_0 * E = E .$$

Corollaire: ~~Soit~~ Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et E une distribution sur Ω alors $\exists T$ une distrib. sur Ω tq $\bar\partial T = \Omega$.

preuve: comme dans le cas lisse!

~~Corollaire~~

Théorème: Soit S une surf. de Rie— V un fibré vectoriel ~~holomorphe~~ sur S

On definit pour $U \subset S$ $\mathcal{D}_S(V)^{(U)} = D_S(U;V)$

et pour $U_1 \subset U_2$ $\rho_{U_2,U_1} \mathcal{D}_S(U_2;V) \longrightarrow \mathcal{D}_S(U_1,V)$ comme le dual de $E_0^{1,1}(U_1;V) \xrightarrow[\text{mol. par } \chi \text{ à } 0.]{} E_0^{1,1}(U_2;V)$

Alors $\mathcal{D}_S(V)$ est un faisceau de C_S^∞-modules sur S. Si V est holomorphe

$$\bar\partial : \mathcal{D}_S(V) \longrightarrow \mathcal{D}_S(V \otimes \overline{T_S^*}) = \mathcal{D}_S^{0,1}(V)$$

vérifie $\operatorname{Ker} \bar\partial = \mathcal{O}_S(V)$ $\operatorname{Coker} \bar\partial = 0$

En particulier $H^1(S;\mathcal{O}_S(V)) = \operatorname{Coker}(\bar\partial : \mathcal{D}_S(V) \to \mathcal{D}_S^{0,1}(V))$

~~Corollaire:~~ ~~(c) Topologie surfaces de Riemann compactes~~

~~S compacte:~~

~~$C^\infty(S;V)$ est naturellement un espace vectoriel topologique, de Fréchet dont la topologie est definie par les semi normes~~

~~$\|s\|_{K,\alpha,0}$ pour $K \subset U$~~ ~~$\mathcal{O}_S V|_U \to \mathbb{C}^r \times U$~~ ~~$\to U$~~ ~~un tivt~~

~~$\|s\|_{K,\alpha,0} = \|\mathcal{O}_\alpha(s)\|_{C^\alpha(K)}$.~~

(c) <u>Cas des surfaces de Riemann compactes.</u>

S compacte $\quad C^\infty(S,V)$ est un espace de Fréchet, c'est à dire que
$\pi : V \to S$ vectoriel holomorphe $\quad$ sa topologie est définie par un nombre dénombrable de semi normes $\|\cdot\|_{K,n}$ ~~K compact~~ avec $K \subset\subset U$ $\quad (U,z)$ ouvert de carte

et complet pour la distance

$$d(x,y) = \sum_m \frac{\|x-y\|_m}{1+\|x-y\|_m}$$

$E^{0,1}_{C^\infty}(S,V)$ a une topologie du même type.

et $\quad Dol^\bullet(S;V) : C^\infty(S,V) \xrightarrow{\bar\partial} E^{0,1}_{C^\infty}(S,V)$ est un complexe de Fréchet ($\bar\partial$ continu pour la topologie en question)

~~Son transposé~~ $\quad$ ~~$\mathcal{D}(V^*\otimes$~~ Observons que $(V\otimes E^{0,1})^*\otimes E^{11} \simeq V^*\otimes E^{1,0}$

car $\quad E^{1,1} \simeq E^{1,0}\otimes E^{0,1}$

et $\quad E^{0,1*}\otimes E^{0,1} \simeq \mathbb{C}$.

<u>Prop</u> ~~Dans~~ $\quad$ Le complexe dual de $Dol^\bullet(S,V)$ est

$$\mathcal{D}(S; V^*\otimes T_S^*) \xrightarrow{+\bar\partial} \mathcal{D}(S, V^*\otimes T_S^*\otimes \overline{T}_S^*)$$

<u>Preuve:</u> $\quad$ En effet $\quad C^\infty(S,V)' = \mathcal{D}(S; V^*\otimes T_S^*\otimes \overline{T}_S^*)$

car $\quad (V^*\otimes T_S^*\otimes \overline{T}_S^*)^*\otimes T_S^*\otimes \overline{T}_S^* \simeq V$

~~donc~~ De m̂ $\quad C^\infty(S, V\otimes \overline{T}_S^*)' = \mathcal{D}(S, V^*\otimes T_S^*\otimes \overline{T}_S^*)$

Formulaire : ~~on a~~ Soit $V\otimes V^* \xrightarrow{(\,,\,)} \mathbb{C}$ la dualité naturelle et le couplement de dualité sous jacent est :

$$C^\infty(S,V) \otimes \mathcal{D}^{1,1}(S,V^*) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$s \otimes T \longrightarrow \int_S (s,T)$$

$$d(s,\theta) =$$

il est clair que $\bar\partial \underbrace{(s,\theta)}_{} = (\bar\partial s,\theta) + (s,\bar\partial\theta)$

$s \in \overset{C^\infty}{V}$ ~~ou $V\otimes T_S^*$~~

$\theta \in \mathcal{D}(V\otimes \mathcal{E}_S^{1,0})$

(car c'est le cas dans $\mathbb{C}$!)

donc, comme: $\int_S d(s,\theta) = 0$

(car si θ_i est un distr à supp cpact dans $\mathbb{C}$ $\int_S d\theta_i = 0$) En effet

il suit que

$$\int_S d\theta_i = \int_{\mathbb{C}} \varphi\, d\theta_i \qquad \varphi \equiv 1 \text{ près de } \operatorname{supp}(\theta_i)$$

$$= -\int_{\mathbb{C}} d\varphi\, \theta_i \qquad \text{(définition de la dérivée des distributions)}$$

$$= 0 \quad \text{car } d\varphi = 0 \text{ sur } \operatorname{supp}(\theta_i)$$

$$\int (\bar\partial s,\theta) = \int (s,\bar\partial\theta)$$

soit $\bar\partial = {}^t\bar\partial$! $\square$.

~~De là vient que~~

(d) <u>dualité de Serre</u>

<u>Thm</u>: Soit S un SR compacte $\pi: V \to S$ fibré vect. holo

$$H^1(S;\mathcal{O}_S(V)) \cong H^0(S;\mathcal{O}_S(V^*\otimes T_S^*))$$

$$\left(H^1(S;\mathcal{V}) \cong H^0(S,\Omega_S^1 \otimes \mathcal{V}^*)' \right)$$

<u>Preuve</u>.

<u>Lemme</u>: $\bar\partial$: $C^\infty(S,V) \to E^{0,1}(S,V)$

$\mathcal{D}(S,V) \to \mathcal{D}^{0,1}(S,V)$

sont d'image fermée et de codimension finie

<u>Preuve</u>: Cette image est le noyau des surjections naturelles

$$\begin{array}{ccc} E^{0,1}(S,V) & & \mathcal{D}^{0,1}(S,V) \\ \downarrow n_{C^\infty} & \text{et} & \downarrow n_{\mathcal{D}} \\ H^1(S,\mathcal{O}_S(V)) & & H^1(S,\mathcal{O}_S(V)) \end{array}$$

il suffit de démontrer qu'elle sont continues —.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrt ouvert de S tq $U_i \subset\subset U'_i$ et U'_i, ouvert de carte sur le el V est trivial

on peut supposer $\mathcal{U}$ comme dans la preuve du thm de finitude

on definit une application continue: comme suit:

$$E^{0,1}(S,V) \xrightarrow{i} \mathcal{D}^{0,1}(S,V) \xrightarrow{\zeta} Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_S(V))$$

Sur $U'_i \subset \mathbb{C}$ $\mathcal{T}^{0,1}|_{U'_i}$ est un distrib. si $\varphi_i \equiv 1$ près de U_i et $\varphi_i \in C_0^\infty(U_i)$

$\varphi_i T$ defin un distr. à supp compact sur $\mathbb{C}$

$$\theta_i = \left(z \mapsto \frac{1}{\pi z}\right) * \varphi_i T \quad \text{verifie} \quad \bar\partial \theta_i|_{U'_i} = \varphi_i T|_{U'_i}$$

puis $\bar\partial \theta_i|_{U_i} = T|_{U_i}$

donc $(\theta_i - \theta_j) \in \mathcal{O}(U_{ij})$ est un cocycle dans $Z^1(\mathcal{U}; \mathcal{O}_S(V))$

Toutes les opérations ~~obtenues~~ utilisées sont continues et ceci definit ζ comme une application continue pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts dans Z^1

la proj naturelle $Z^1 \xrightarrow{\pi} H^1(S, \mathcal{O}_S(V))$ est continue donc $\pi \circ \zeta$ et $\pi \circ \zeta \circ i$ sont continues. Mais ces applications sont $(\pm)$ n_{C^∞} et $n_{\mathcal{D}}$

<u>Corollaire:</u>

$$C^\infty(S,V) \cong H^0(S, \mathcal{O}(V)) \oplus \mathcal{S}$$

$$E^{0,1}(S,V) \cong \mathcal{T} \oplus H^1(S, \mathcal{O}(V))$$

où $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ sont des sev de dim infinie

l'isomorphisme étant un isomorphisme d'espaces ~~de Fréchet~~ d'evt.

$\mathcal{T} = \mathrm{Im}(\bar\partial)$ est fermé et $\mathcal{S} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{T}$ est un morphisme bijectif et continu d'espaces de Fréchet — donc un isomorphisme d'evt.

$$\mathcal{D}(S,V) \cong H^0(S, \mathcal{O}(V)) \oplus \Sigma$$

$$\mathcal{D}^{0,1}(S,V) \cong \mathrm{Im}(\bar\partial) \oplus H^1(S, \mathcal{O}(V))$$

comme EVT et $\Sigma \xrightarrow{\bar\partial} \mathrm{Im}\,\bar\partial$ est un isomorphisme topologique.

En particulier $\quad {}^t\bar\partial = \quad \mathcal{T}' \oplus H^1(S,\mathcal{O}(V))' \longrightarrow S' \oplus H^0(S,\mathcal{O}(V))'$

et ${}^t\bar\partial \; (T') = S'$.

par suite $\quad H^0(S,\mathcal{O}(V)^*)'$ est un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,\bar\partial$ dans $\mathcal{D}^{0,1}(S;V^*\otimes T_S^*)$ et donc est isomorphe à l'autre supplémentaire construit précédemment $H^1(S,V^*\otimes T_S^*)$

Remarque: au niveau des formes / distrib la dualité est donnée par l'accouplement explicite:

$$\left(\begin{array}{ccc} H^0(S,\mathcal{O}(V)) \otimes H^1(S;V^*\otimes T_S^*) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \sigma \qquad\qquad [\alpha] & \longmapsto & \displaystyle\int_S \sigma\alpha \end{array}\right)$$

$\alpha \in E^{0,1}(V^*\otimes T_S^*) = E^{1,1}(V^*\otimes$

(e) version finale du thm de Riemann Roch

Corollaire $\; g = \dim H^0(S,\Omega^1_S)$. $\Omega^1_S = \mathcal{O}_S(T_S^*)$

Le genre de $\mathbb{P}^1$ est 0, de $\mathbb{C}/\Lambda$ est 1, pour d'autre SR $g \geq 2$ est possible.

Corollaire: D un diviseur sur S et K_S un diviseur tq $\Omega^1_S = \mathcal{O}(T_S^*) = \mathcal{O}_S(K_S)$

(~~version~~ théorème de Riemann-Roch II) alors $\quad h^0(D) - h^0(K_S - D) = 1 - g + \deg D$.

avec $\quad h^0(D) = H^0(S,\mathcal{O}_S(D))$.

En effet $\quad T_S^* \otimes \mathcal{O}_S(D)^* = \mathcal{O}_S(K_S) \otimes \mathcal{O}_S(-D)$

$\qquad\qquad = \mathcal{O}_S(K_S - D)$.

~~Corollai~~

Corollaire $\; \deg K_S = 2g - 2$. $\qquad 1 - g + \deg K_S = h^0(K_S) - h^0(0)$

$\qquad\qquad = g - 1$.

Corollaire: si $\deg D \geq 2g - 1$. $\qquad h^0(D) = 1 + g + \deg D$

$$\begin{array}{c} h^0(D) \\ \| \\ \dim\{f \in M(S) \;\; v_p(f) \geq -a_p(D)\} \end{array}$$

$\mathcal{O}_S(K - D)$

K − D a alors degré < 0 et ne peut donc avoir de section car si $\sigma \in H^0(S,\mathcal{O}(L)) \neq 0$ l'iso construit $\mathcal{O}(L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S(D)$ vérifiait: $D = \sum_{p \in S} v_p(\sigma) \cdot p$