II Faisceaux

(1) généralités

a) préfaisceaux, faisceaux : définition premiers exemples

Déf Soit M un espace topologique. Un préfaisceau d'ensemble $\mathcal{F}$ sur M est la donnée $(\mathcal{F}(U); \rho_{U,V})$ de

- pour tout ouvert U d'un ensemble $\mathcal{F}(U)$
- pour toute inclusion d'ouverts $V \subset U$ d'une application $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$

vérifiant que pour $W \subset V \subset U$ $\rho_{V,W} \circ \rho_{U,V} = \rho_{U,W}$. On demande aussi $\mathcal{F}(\emptyset) = \{*\}$ ensemble à un élément.

Exemple
- $\mathcal{C}^0(U) = \mathcal{C}^0(U;\mathbb{R})$ $\rho_{U,V}(f) = f|_V$ (restriction de f à V) si $U, V \neq \emptyset$
  si $U \supset V \supset W$ et $f \in \mathcal{C}^0(U)$ $f|_W = f|_V|_W$
  $\mathcal{C}^0$ est un préfaisceau ; préfaisceau des fonctions continues
- E un ensemble $\mathcal{E}(U) = E$ $\rho_{U,V} = id_E$ si $U, V \neq \emptyset$
  définit un préfaisceau dit constant.

Déf $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur M est dit un faisceau si les deux conditions suivantes sont remplies :

Pour tout U et tout $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ un recouvrement ouvert,

1) $\forall s, t \in \mathcal{F}(U)$ $s = t \iff \forall \alpha$ $\rho_{U_\alpha, U}(s) = \rho_{U, U_\alpha}(t)$

2) $\forall (s_\alpha) \in \prod_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha)$ $\exists s \in \mathcal{F}(U)$ tq $\rho_{U, U_\alpha}(s) = s_\alpha \iff \forall \alpha, \beta$ $\rho_{U_\alpha, U_\beta \cap U_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{U_\beta, U_\alpha \cap U_\beta}(s_\beta)$
$\in \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$

Remarque : le s produit par (2), $\Leftarrow$ est unique grâce à (1).

Exemple 1. $\mathcal{C}^0$ est un faisceau.

En effet $f = g \in \mathcal{C}^0(U)$ si $\forall \alpha$ $f|_{U_\alpha} = g|_{U_\alpha}$ cette dernière part implique $\forall x \in U$ $f(x) = g(x)$

de plus si $f_\alpha \in \mathcal{C}^0(U_\alpha)$ vérifie $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ (*) on peut définir

$f(x) = f_\alpha(x)$ où $x \in U_\alpha$ cette définition étant indépendante de α choisi grâce à (*)

f est alors continue.

- $\mathcal{E}$ n'est généralement pas un faisceau si E a 2 éléments distincts au moins.

Notons a et b deux ~~réels~~ éléments et supposons $U = U_1 \cup U_2$ union disjointe

$e_1 = a \in \mathcal{E}(U_1)$
$e_2 = b \in \mathcal{E}(U_2)$

Si $\mathcal{E}$ est un faisceau il existe $e \in \mathcal{E}(U)$ $e|_{U_i} = e_i$. $e = c \in E$ et il existe $c \in E$ $c = a$ et $c = b$ d'où $a = b$.

- Soit E un ensemble $\mathcal{E}_M^{any} : U \longrightarrow E^U =$ Applications de U à valeurs dans E est un ~~sous~~ faisceau. (même démonstration que précédemment).

<u>Déf</u> Soient $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux faisceaux sur M.

(1) Un sous-faisceau $\mathcal{F}''$ de $\mathcal{F}$ est la donnée pour tout U de $\mathcal{F}''(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ tq $\rho_{U,V}\, \mathcal{F}''(U) \subseteq \mathcal{F}''(V)$ et $\forall (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ $\forall f''_\alpha \in \mathcal{F}''(U_\alpha)$ tq $f''_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f''_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$ l'élément $f'' \in \mathcal{F}(\bigcup_\alpha U_\alpha)$ vérifie $f'' \in \mathcal{F}''(\bigcup_\alpha U_\alpha)$.

(2) Un morphisme $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ est la donnée pour tout U de $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}'(U)$ tq

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{UV}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{F}'(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}'}_{UV}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathcal{F}'(V) \end{tikzcd}$$

<u>Scholie</u>: Une sous faisceau est un sous préfaisceau qui est un faisceau
Un mcq de faisceau est un mcq des préfaisceaux. sous jacents
L'inclusion d'un sous faisceau ~~est~~ un morphisme de faisceaux.

<u>Exemples</u> 2 Si E ensemble le sous faisceau $\mathcal{E}_M^{any}$ ~~[illegible]~~ plusieurs sous-faisceaux associés généralement à des structures supplémentaires sur E

- Si E est muni d'une topologie J $\left(U \mapsto C^0(U, E)\right) = \mathcal{C}^0_{(E,J)}$ est un sous faisceau de $\mathcal{E}_M^{any}$

$\mathcal{E}_M^{lc}(U) \subset \mathcal{E}_M^{any}(U)$ $\mathcal{E}_M^{lc}(U) =$ applications localement constantes sur U à valeurs dans E forme un sous faisceau.

Noter que $\mathcal{E}_M^{lc} = \mathcal{C}^0_{(E, J^{discr})}$ $J^{discr} = \mathcal{P}(E)$

$\mathcal{E}_M^{any} = \mathcal{C}^0_{(E, J^{gross})}$ $J^{gross} = \{\emptyset, E\}$

De façon pour que un préfaisceau $\mathcal{E}^*_M \subset \mathcal{E}_M^{any}$ forme un faisceau ~~la~~ est point-clef que l'appartenance à $\mathcal{E}^*_M$ se teste localement.

Exemple $E = \mathbb{R}$ $\mathbb{R}_M =$ faisceau des localts constantes
$\mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}, \mathcal{C}^k_{\mathbb{R}}, \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}} =$ faisceaux des fonctions continues, de classe C^k, de classe C^∞

$E = \mathbb{C}$ on a l'~~a~~ chaine d'inclusion

$$\underline{\mathbb{C}}_S \subseteq \mathcal{O}_S \subset C^\infty_S \subset C^0_S \subset \mathbb{C}^{any}_S$$

faisceau des fonctions localt constantes à valeurs complexes

faisc. des fonctions holo

de classe C^∞

faisceau des fonctions continues sur S

- ~~MAS~~ S surface de Riemann

X variété complexe la hiérarchie précédente se généralise en:

$$X_S \subseteq Holo_S(-,X) \subseteq C^\infty_S(-,X) \subseteq C^0_S(-,X) \subseteq X^{any}_S$$

$X = \mathbb{C}^*$ $\quad \mathcal{O}^*_S(U) =$ fonctions holomorphe sur U, ne s'annulant jamais sur U

$(C^\infty_S)^* =$ ..... C^∞ .....

$(C^0_S)^* =$ ..... C^0 .....

<u>Exemple 3</u> Soit M un espace topologique et supposons donné pour chaque $x \in M$ un ensemble $\mathcal{F}(x)$

On peut former $\Phi = \bigcup_{x \in M} \mathcal{F}(x)$ <u>union disjointe</u>

et on peut considerer

$\mathcal{F}^{disc} \subset \Phi^{any}_M$ définit par

$$\mathcal{F}^{disc}(U) = \{ s : U \to \Phi \mid \forall x \in U \quad s(x) \in \mathcal{F}(x) \}.$$

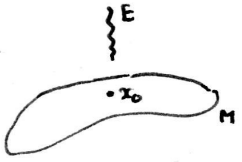
$\mathcal{F}^{disc}$ est un faisceau.

Si $\mathcal{F}(x_0) = E$ et $\mathcal{F}(x) = \phi$ si $x \neq x_0$ on a

$$\mathcal{F}^{disc}(U) = E \quad \text{si } x_0 \in U$$
$$= \phi \quad \text{si } x_0 \notin U$$

et le faisceau est connu sous le nom de faisceau gratte ciel en x_0 de valeur E not: $E^{sky}_{x_0, M}$

<u>Remarque</u>: gratte-ciel = sky scraper



(b) <u>germes de sections d'un faisceau</u>

M espace topologique $\mathcal{F}$ - préfaisceau et $x \in M$

U_x – ouvert de M contenant x.

Sur $\bigcup_{U \in \mathcal{T}_x} \mathcal{F}(U)$ on définit $\sim$ une relation d'equivalence par

$s_U \in \mathcal{F}(U)$
$s_V \in \mathcal{F}(V)$

$s_U \sim s_V$ ssi $\exists W \in \mathcal{T}_x$ $W \subseteq U \cap V$ tq $\rho_{UW} s_U = \rho_{VW} s_V$

<u>Déf</u>: $\mathcal{F}_x = \dfrac{\bigcup_{U \in \mathcal{T}_x} \mathcal{F}(U)}{\sim}$ est l'espace des germes de section de $\mathcal{F}$ en x.

<u>Notée</u>: $s_x \in \mathcal{F}_x$ un germe se laisse décrire comme une section de $\mathcal{F}(U)$ où $U \ni x$ est assez petit, U pouvant être arbitrairement petit. Si $s \in \mathcal{F}(U)$ on note s_x l'élément de $\mathcal{F}_x$ qu'il définit.

On peut donc à tout $\mathcal{F}$ préfaisceau associer $\mathcal{F}^{disc}$, un faisceau, comme dans l'exemple 3

<u>Lemme</u>: $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous faisceau du faisceau $\mathcal{G}$. Alors $\left(U \mapsto \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{F}_\alpha(U), \rho_{U,V}\right)$ définit un sous faisceau de $\mathcal{G}$.

<u>Corollaire</u>: Il existe un sous faisceau $\mathcal{F}^*$ de $\mathcal{F}^{disc}$ unique minimal parmi ceux contenant $\mathcal{F}$. On a:

$$\mathcal{F}^*(U) = \{ (s_x)_{x \in X} \mid s_x \in \mathcal{F}_x \text{ et tout } x \text{ un voisinage } V \text{ tq } \exists s_V \text{ avec } \forall y \in V \quad (s_V)_y = s_x \}$$

Pour tout morphisme de préfaisceaux $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ avec $\mathcal{G}$ faisceau on a une extension unique un morphisme de faisceaux $\mathcal{F}^* \to \mathcal{G}$.

<u>Idée de preuve</u>: on vérifie que $\mathcal{F}^*$ est une faisceau car l'appartenance à $\mathcal{F}^*$ se teste localement. $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*$ et forcer les sections de $\mathcal{F}$ à se recoller pour satisfaire le point n° (2) amène naturellement à $\mathcal{F}^*$.
La propriété universelle découle du fait que pour tout $s \in \mathcal{F}^*(U)$ les sections $\varphi_V(s_V)$ se recollent dans $\mathcal{G}$.

c) <u>faisceaux en groupes</u>.

- <u>Déf</u> Un faisceau en groupe sur M est la donnée de $(\mathcal{A}(U); \rho_{U,V})$ $U \in \mathcal{T}_M$ $V \subset U$ tq $\mathcal{A}(U)$ groupe $\rho_{U,V}$ morphisme de groupes pour U, V non vides, vérifiant les mêmes propriétés que les (pré) faisceaux d'ensembles, sauf que $\mathcal{A}(\emptyset) = \{0\}$. Un faisceau en groupes abéliens est dit faisceau abélien. On définit aussi "faisceau d'anneaux".

Remarque Si $\mathcal{A}$ préf. de groupes $\mathcal{A}_x$ groupe $\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^{disc}$ sont des faisceaux abéliens $\mathcal{A}^*$ au

Un morphisme de faisceaux abéliens est un morphisme de faisceaux φ dont les φ_U sont des morphismes de groupes abéliens.

Exemple S surf. de Riemann $\mathbb{Z}_S \subseteq \mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{C}_S^\infty \subseteq \mathcal{C}_S^0$ faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_S^*$ faisceau abélien.

d) Opérations sur les faisceaux abéliens

- Soit $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha\in A}$ famille de faisceaux en groupes abéliens. ~~on définit~~

On définit $\prod_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha$ par $\left(\prod_\alpha \mathcal{A}_\alpha\right)(U) = \prod_\alpha \mathcal{A}_\alpha(U)$

$\sum_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha$ par faisceau associé à $U \to \sum_\alpha \mathcal{A}_\alpha(U)$

$$\left(\sum_\alpha \mathcal{A}_\alpha\right)_x = \sum_{\alpha\in A} \mathcal{A}_{\alpha,x}.$$

C'est un sous faisceau du précédent.

NB Si $(A_\alpha)_{\alpha\in A}$ famille de groupes abél $\sum_{\alpha\in A} A_\alpha \subset \prod_{\alpha\in A} A_\alpha$ est l'ensemble des $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ tq $x_\alpha = 0$ sauf pour α dans une ~~fam~~ partie finie de A.

Si A est finie on note $\prod_\alpha A_\alpha = \sum_\alpha \mathcal{A}_\alpha = \bigoplus_\alpha \mathcal{A}_\alpha$.

Déf Soit $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur M et $\mathcal{M}$ un faisceau abélien sur M. Une structure de $\mathcal{A}$-module sur $\mathcal{M}$ est une morphisme de faisceaux $\mathcal{A}\times\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ tq $\forall U$ $\mathcal{A}(U)\times\mathcal{M}(U) \to \mathcal{M}(U)$ fait de $\mathcal{M}(U)$ un $\mathcal{A}(U)$-module.

- Soit $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme de faisceaux abéliens

Déf $\operatorname{Ker}\varphi$ est le faisceau $U \mapsto \operatorname{Ker}(\varphi(U))$

$\operatorname{Coker}\varphi$ est le faisceau associé à $U \mapsto \operatorname{Coker}(\varphi(U))$

$\operatorname{Im}\varphi$ ——— $U \mapsto \operatorname{Im}(\varphi(U))$

Lemme: (1) $\operatorname{Ker}(\varphi)_x = \operatorname{Ker}(\varphi_x)$ $\operatorname{Coker}(\varphi)_x = \operatorname{Coker}(\varphi_x)$

(2) $\operatorname{Ker}(\mathcal{B} \to \operatorname{Coker}\varphi) \simeq \operatorname{Im}\varphi$

$\operatorname{Coker}(\operatorname{Ker}\varphi \to \mathcal{A}) \simeq \operatorname{Im}\varphi$

preuve (1) est laissé à l'étudiant mais est intéressant
(2) est impliqué par (1). Le point (2) est peu surprenant mais implique une propriété axiomatique ~~importante~~ l'isomorphisme de l'image et de la coimage.

Les faisceaux abéliens (et la catégorie qu'ils forment) se comporte comme les groupes abéliens. Si $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ on définit $\mathcal{A}/\mathcal{B} = \operatorname{Coker}(\mathcal{A}\subset\mathcal{B})$. On a $\mathcal{A}+\mathcal{B}/\mathcal{C} \simeq \mathcal{A}/\mathcal{A}\cap\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}\subset\mathcal{B}$, etc....

(2) cohomologie des faisceaux

(a) prescription des singularités d'une fonction holomorphe et interpolation.

- Soit S une surface de Riemann, $D \subset S$ un ensemble discret, en chaque point $d \in D$ on considère (U_d, φ) une carte avec $\varphi(d) = 0$ et on se donne une série de Laurent à termes négatifs $f^d = \sum_{i=1}^{i=N} a_i^d z^{-i}$.

Problème 1: existe t il une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(S)$ telle que

- $f \in \mathcal{O}(S \setminus D)$
- $\forall d \in D \quad f \circ \varphi^{-1} = f^d + \sigma^d$ avec $\sigma^d = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$?

Reformulation:
La donnée $\{f^d\}_{d \in D}$ décrit le type des singularités de f la question est: étant donné un type de singularités, existe t il une fonction réalisant ce type?

Faisceautisation (transformation en un problème de théorie des faisceaux)

Sur U_d la fonction $f^d \circ \varphi$ répond manifestement au problème (quitte à réduire U_d)
sur $U_e = S \setminus D$ ——— o ———
On suppose les $\{U_d\}_{d \in D}$ deux à deux disjoints.
Nous disposons donc de $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert avec pour tout $\alpha \in A$
$f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ avec

si $d \in U_\alpha \quad f_\alpha \circ \varphi^{-1} = f^d + \sigma^d$ sur $U_\alpha \cap U_d$

c'est à dire f_α est une solution locale du problème.

Si jamais $f_\alpha = f_\beta$ sur $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ la propriété de faisceau de $\mathcal{M}$ implique qu'on peut recoller les (f_α) en une solution globale, ie une fonction méromorphe sur S, solution du problème.

Dans notre exemple $f_d - f_e = f^d \circ \varphi$ sur $U_{de} = U_d \setminus \{d\}$ et cette clause est désespérée, apparement. Noter que $f_{de} = f_d - f_e \in \mathcal{O}(U_{de})$ car la singularité de f_d n'est plus dans U_{de}.
Ce dont nous disposons toujours est d'une famille $f_{\alpha\beta} = f_\alpha - f_\beta \in \mathcal{O}(U_{\alpha\beta})$ qui décrit l'obstruction à recoller les solutions locales.

Si jamais il existe $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ $g_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ tq $g_\alpha - g_\beta = f_{\alpha\beta}$ $\forall \alpha, \beta$
il suit que $f_\alpha^* = f_\alpha - g_\alpha$ vérifie

$$f_\alpha^* = f_\beta^* \text{ sur } U_{\alpha\beta}$$

$$f_\alpha^* \circ \varphi^{-1} = f^d + (\sigma^d + g_\alpha \circ \varphi^{-1}) = f^d + (\sigma^d)^* \qquad \sigma^d{}^* = \sum_{i=0}^{\infty} b_i^* z^i$$

Donc les $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ se recollent en une solution du problème.

On ~~peut~~ remarque que $(f_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in A}$ bénéfie

(i) $f_{\alpha\beta}\in\mathcal{O}(U_{\alpha\beta})$

(ii) $\forall\alpha,\beta,\gamma$ $\quad f_{\alpha\beta}+f_{\beta\gamma}+f_{\gamma\alpha}=0$ ~~sur~~ dans $\mathcal{O}(U_{\alpha\beta\gamma})$

preuve de ii $\quad f_{\alpha\beta}=f_\alpha-f_\beta$ avec $f_\alpha\in\mathcal{M}(U_\alpha)$

donc (ii) a lieu dans $\mathcal{M}(U_{\alpha\beta\gamma})$ en particulier dans $\mathcal{O}(U_{\alpha\beta\gamma})$

<u>Déf 1</u>

$$\mathcal{Z}^1(\mathcal{U},\mathcal{O})=\{(f_{\alpha\beta})\in\mathcal{O}(U_{\alpha\beta})\ \text{tq (ii)}\}$$

$$\mathcal{B}^1(\mathcal{U},\mathcal{O})=\{(f_{\alpha\beta})\in\mathcal{O}(U_{\alpha\beta})\ \text{tq}\ \exists(g_\alpha)\in\mathcal{O}(U_\alpha)\quad f_{\alpha\beta}=g_\alpha-g_\beta\}$$

$$H^1(\mathcal{U},\mathcal{O})=\mathcal{Z}^1/\mathcal{B}^1$$

<u>Prop</u> Le problème 1 a une solution globale s'il existe une solution locale relative à un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ $\quad (f_\alpha)_{\alpha\in A}$ $\quad f_\alpha\in\mathcal{M}(U_\alpha)$ dont l'obstruction $(f_{\alpha\beta})$ $f_{\alpha\beta}=f_\alpha-f_\beta\in\mathcal{O}(U_{\alpha\beta})$ vérifie $\overline{(f_{\alpha\beta})}=0$ dans $H^1(\mathcal{U},\mathcal{O})$.

- <u>Problème 2</u>: Soit S surf. de Riemann DCS ~~enseble~~ discret et $(a_d)_{d\in D}$ une famille de nombres complexes. Existe t'il $f\in\mathcal{O}(S)$ tq $\forall d\in D$ $f(d)=a_d$.

<u>Lemme 4</u>: $\mathcal{I}_D(U)=\{f\in\mathcal{O}(U)\mid f(d)=0\quad\forall d\in U\cap D\}$ est un sous faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_S$.

<u>Lemme</u>: ~~Soit~~ Soit $\mathcal{U}=(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert avec la propriété que $\forall\alpha\in A$ $\quad U_\alpha\cap D$ est vide ou un singleton. Le problème 2 a alors une solution locale relative à $\mathcal{U}$ donnée par

$$f_\alpha=a_d\quad\text{si } d\in U_\alpha$$
$$f_\alpha=0\quad\text{sinon.}$$

~~Prop~~ <u>Déf</u> On peut dans la définition 1 substituer $\mathcal{I}$ à $\mathcal{O}$ pour définir $H^1(\mathcal{U},\mathcal{I})$. Plus généralement ceci définit $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F}$ faisceau abélien quelconque.

<u>Prop</u>: Le problème 2 a une solution globale si il admet une solution locale relative à un recouvrt $\mathcal{U}$ dont l'obstruction s'annulle dans $H^1(\mathcal{U},\mathcal{I}_D)$.

<u>Ex</u> $S=\mathbb{P}^1$ $\quad D=\{0,\infty\}$ $\quad a_0=0$ $\quad a_\infty=1$. Pour tout $\mathcal{U}$ ~~convenable~~ convenable $H^1(\mathcal{U},\mathcal{I}_D)\neq\{0\}$. En effet tout fonction holo sur $\mathbb{P}^1$ est <u>constante</u> et le problème (2) n'a pas de solution.

points communs entre les deux problèmes.

Problème 1	Problème 2
inclusion de faisceaux abéliens	
$\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{M}_S$	$\mathcal{J}_D \subseteq \mathcal{O}_S$
$\mathcal{O}_{S,x} = \{ f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ série entière conv. $\}$	$\mathcal{J}_{D,x} = \{ f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ conv $\}$ si $x \notin D$ $= \{ f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, conv. $\}$
$\mathcal{M}_{S,x} = \{ f = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n z^n$ série de Laurent conv. $\}$	
$\left(\mathcal{M}/\mathcal{O}\right)_x = \mathcal{M}_{S,x}/\mathcal{O}_{S,x} = \{ f = \sum_{-N}^{-1} a_n z^n \}$	$\dfrac{\mathcal{O}_{S,x}}{\mathcal{J}_{D,x}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin D \\ \mathbb{C} & \text{si } x \in D. \end{cases}$
$(\mathcal{M}/\mathcal{O})(U) = \{ (f_x) \mid f_x \in \frac{\mathcal{M}_x}{\mathcal{O}_x}$ et $f_x = 0$ sauf pour x dans un ensemble discret $\}$	$(\mathcal{O}_S/\mathcal{J}_D)(U) = \bigoplus_{d \in U \cap D} \mathbb{C}_d^{skyr}$
La donnée $\{ f^d \}_{d \in D}$ est un élément de $\mathcal{M}/\mathcal{O}(S)$	La donnée $\{ a_d \}_{d \in D}$ est un élément de $\mathcal{O}_S/\mathcal{J}_D(S)$

Le problème est celui du relèvement de la donnée sous le morphisme de groupes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(S) & \longrightarrow & \mathcal{M}/\mathcal{O}(S) \\ \| & & \| \\ \Gamma(S,\mathcal{M}) & & \Gamma(S,\mathcal{M}/\mathcal{O}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(S) & \longrightarrow & \mathcal{O}/\mathcal{J}_D(S) \\ \| & & \| \\ \Gamma(S,\mathcal{O}) & & \Gamma(S,\mathcal{O}/\mathcal{J}_D). \end{array}$$

Il y a en fait une 0-suite :

$$0 \to \Gamma(S;\mathcal{O}) \to \Gamma(S,\mathcal{M}) \to \Gamma(S,\mathcal{M}/\mathcal{O}) \qquad 0 \to \Gamma(S;\mathcal{J}_D) \to \Gamma(S,\mathcal{O}_S) \to \Gamma(S;\mathcal{O}_S/\mathcal{J}_D)$$

Une obstruction au relèvement vit dans le groupe

$$H^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_S) \qquad H^1(\mathcal{U},\mathcal{J}_D)$$

si $\mathcal{U}$ recouvrement ouvert assez fin.

(b) rudiments d'algèbre homologique.

Déf (1) Un diagramme de groupes abéliens et homomorphismes

$$\to A_i \xrightarrow{d_i} A_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} A_{i+2} \to \cdots$$

est une 0-suite si $\forall i \quad d_{i+1} \circ d_i = 0$

(2) C'est une suite exacte si $\mathrm{Im}(d_i) = \mathrm{Ker}(d_{i+1})$.

(3) Soit $A^\bullet$ un complexe on pose $\quad Z^i(A^\bullet) = \operatorname{Ker} d_i : A^i \to A^{i+1} \quad B^i(A^\bullet) = \operatorname{Id}(A^{i-1} \to A)$

$$H^i(A^\bullet) = \frac{\operatorname{Ker} d_i \ (A^i \to A^{i+1})}{\operatorname{Im} d_{i-1} : (A^{i-1} \to A^i)} = \frac{Z^i(A^\bullet)}{B^i(A^\bullet)}.$$

<u>Lemme:</u>

Un complexe de groupe est une suite exacte si $\forall i \quad H^i(A^\bullet) = 0$ (on parle aussi de complexe acyclique).

<u>Lemme:</u>

Une 0-suite de la forme $0 \to A \to B \to C \to 0$ est dite une suite exacte courte si elle est exacte. Il est equivalent de dire que $0 \to A \to B \to 0 \to 0$ est un s.e.c. et de dire que

(1) $A \to B$ injective
$B \to C$ surj
$\operatorname{Im}(a) = \operatorname{Ker}(b)$

(2) $A \xrightarrow{a} B$ injective et $B \to C \simeq A \to \operatorname{Coker}(a)$

(3) $A \xrightarrow{a} B$ injective et $C \simeq B/A$.

<u>Définition - Remarque.</u> Les mêmes définitions et lemmes se généralisent aux faisceaux abéliens sur un espace topologique

(c) <u>complexe de Čech</u> Soit M un espace topologique.

- Soit $\mathcal{F}$ un faisceau abélien $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de M on pose pour $q \geq 0$

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in A^{q+1}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_q})$$

Si $c^q = (f_{\alpha_0 \dots \alpha_q})$ on pose $\delta c^q \in C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ par

$$(\delta c^q)_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}} = f_{\alpha_0 \dots \alpha_q}\Big|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_q}} - f_{\alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_q}\Big|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_q}} + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \ f_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_q}\Big|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{q+1}}}$$

<u>Théorème</u> $(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta)$ est un complexe contentié en degré ≥ 0

$$H^0(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \simeq \mathcal{F}(M) = \Gamma(M, \mathcal{F})$$

$$H^1(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) = H^1(\mathcal{U}; \mathcal{F})$$

<u>Déf</u> Pour tout q on pose $\quad H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^q(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$.
$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(M)$.

<u>Rem</u>

<u>Preuve</u>. • $\delta^2 c^0 = \delta^2 (f_\alpha)_\alpha = \delta\,(f_\alpha - f_\beta)_{\alpha,\beta} = \delta(f_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$

$$= (c_{\alpha\beta\gamma})_{\alpha,\beta,\gamma}$$

$$\begin{aligned} c_{\alpha,\beta,\gamma} &= f_{\alpha\beta} - f_{\alpha\gamma} + f_{\beta\gamma} && \Big|_{U_{\alpha\beta\gamma}} \\ &= (f_\alpha - f_\beta) - (f_\alpha - f_\gamma) + (f_\beta - f_\gamma) && \quad '' \\ &= 0. && \quad '' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ (\delta^2 c^q)_{\alpha_0 \cdots \alpha_q} &= \sum_{i=0}^{q+2} (-1)^i\, \delta c^q_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_q} && \Big|_{U_{\alpha_0 \cdots \alpha_q}} \\ &= \sum_{i=0}^{q+2} (-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} c^q_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_j \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_q}\, (-1)^j && \quad '' \\ &\quad + \sum_{j=i}^{q+1} c^q_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \hat{\alpha}_{j+1} \cdots \alpha_q}\, (-1)^j && \quad \vdots \\ &= \sum_{1 \le i < j \le q+2} c^q_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \hat{\alpha}_j \cdots \alpha_q} \left((-1)^{j+i} + (-1)^{i+j-1} \right) && \quad '' \\ &= 0 \end{aligned}$$

• Donc $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ est un complexe.

• Noter que comme $C^\bullet$ commence en degré 0 $H^0(C^\bullet) = \operatorname{Ker} \delta^0$. Or

si $(f_\alpha)_{\alpha \in A} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ $\qquad (\delta f)_{\alpha\beta} = f_\beta - f_\alpha \Big|_{U_{\alpha\beta}}$

donc $\delta f_\alpha = 0 \iff f_\beta \Big|_{U_{\alpha\beta}} = f_\alpha \Big|_{U_{\alpha\beta}}$.

Par la propriété de faisceau il existe alors un unique $f \in \mathcal{F}(M)$ tq $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$

• $c^1 = (f_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$

$c^1 \in \operatorname{Ker}(\delta^1)$ ssi $f_{\alpha\beta} - f_{\alpha\gamma} + f_{\beta\gamma} = 0 \quad \forall \alpha,\beta,\gamma$

$\alpha = \beta = \gamma \implies f_{\alpha\alpha} = 0$

$\alpha = \beta \implies f_{\beta\gamma} = -f_{\gamma\beta}$

donc $c^1 \in \operatorname{Ker}(\delta)$ si $f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = 0$ ie $c^1 \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

De plus $c' \in \operatorname{Im}\delta^0$ ssi $\exists (f)_{\alpha\in A}$ tq $f_\alpha - f_\beta = f_{\alpha\beta}$.

$\operatorname{Im}\delta^0 = B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Donc $\quad H^1(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})) = H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

(d) <u>raffinements</u>

- Soit $\mathcal{V}=(V_\beta)_{\beta\in B}$ un autre recouvrement ouvert qui raffine de $\mathcal{U}$ c'est à dire qu'il existe une application de raffinement $\tau : B \to A$ tq $V_\beta \subset U_{\tau(\alpha)}$.

Si $\tau : B \to A$ est un raffinit on définit

$$\tau^q : \quad C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^q(\mathcal{V},\mathcal{F}) \quad \text{par}$$

$$(\tau^q c)_{\beta_0 \dots \beta_q} = c_{\tau(\beta_0)\dots\tau(\beta_q)}\Big|_{U_{\beta_0\dots\beta_q}}$$

<u>Lemme</u>: $\tau^\bullet : C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{F})$ est un morph de complexes c'est à dire

$$\tau^{q+1}\delta^q c^q = \delta^q \tau^q c^q.$$

Donc nous avons $\quad \tau^* = H^q(\tau) : H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{V},\mathcal{F})$ un morph. de groupes.

<u>Lemme</u>: Soient τ et σ deux raffinements alors $\tau^* = \sigma^*$.

<u>Preuve</u>: - pour $q=0$ c'est clair car τ^* et σ^* coïncident avec : $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\ (\simeq \mathcal{F}(M)) \xrightarrow{id} H^0(\mathcal{V},\mathcal{F})(\simeq \mathcal{F}(M))$

- pour $q=1$. soit $c = (f_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

$$(\tau^1 c - \sigma^1 c)_{\alpha\beta} = f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} - f_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}$$

$$= \overbrace{f_{\tau(\alpha)\sigma(\alpha)} + f_{\sigma(\alpha)\tau(\beta)}} - \left(f_{\sigma(\alpha)\tau(\beta)} + f_{\tau(\beta)\sigma(\beta)}\right)$$

$$\boxed{(\delta f)_{\tau(\alpha)\tau(\beta)\sigma(\alpha)} = f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} - f_{\tau(\alpha)\sigma(\alpha)} + f_{\tau(\beta)\sigma(\alpha)} = 0}$$

$$= f_{\tau(\alpha)\sigma(\alpha)} - f_{\tau(\beta)\sigma(\beta)}.$$

- pour $q \geq 2$. laissé en exercice, assez délicat d'ailleurs .....

Lemme: Soit τ un raffinement. $\tau^*: H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ est injectif.

Preuve: Soit $c = (f_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in A} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$. On suppose $\tau^* c = 0$ c'est à dire

$(c_{\tau(\alpha)\tau(\beta)})_{\alpha,\beta\in B} \in B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Il existe alors $(f_\alpha)_{\alpha\in B} \in C^0(\mathcal{V},\mathcal{F})$

tq $\quad c_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} = f_\alpha - f_\beta$ dans $V_\alpha \cap V_\beta$. pour tous $\alpha,\beta \in B$.

Soit $\gamma \in A$ $\delta c = 0 \Rightarrow c_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} - c_{\tau(\alpha)\gamma} + c_{\tau(\beta)\gamma} = 0$. Donc

$$c_{\tau(\alpha)\gamma} - f_\alpha = c_{\tau(\beta)\gamma} - f_\beta \quad \text{dans } U_\gamma \cap V_\alpha \cap V_\beta$$

Donc $(c_{\tau(\alpha)\gamma} - f_\gamma)_{\alpha\in A}$ se recolle en une section de $\mathcal{F}$ sur U_γ (noter que $(U_\alpha \cap V_\gamma)_{\alpha\in A}$ est un recouvrement de V_γ)

notons g_γ cette section. $\quad f_\alpha = c_{\tau(\alpha)\gamma} - g_\gamma$ dans $U_\gamma \cap V_\alpha$

$$g_\gamma - g_{\gamma'} = -f_\alpha - c_{\tau(\alpha)\gamma} - (-f_\alpha - c_{\tau(\alpha)\gamma'}) \quad \text{sur } U_\gamma \cap U_{\gamma'} \cap V_\alpha$$

$$= c_{\tau(\alpha)\gamma'} - c_{\tau(\alpha)\gamma}$$

Or: $\quad c_{\tau(\alpha)\gamma'} - c_{\tau(\alpha)\gamma} + c_{\gamma\gamma'} = 0 \quad$ car $c \in Z^1$

$$g_\gamma - g_{\gamma'} = -c_{\gamma\gamma'} \quad \text{sur } U_\gamma \cap U_{\gamma'} \cap V_\alpha$$

ainsi $c = -\delta g$ et $c \in B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$. $\square$.

(e) **Cohomologie de Čech.**

Définition $\quad \check{H}^q(M,\mathcal{F}) = \varinjlim_{(\mathcal{U},\tau)} (H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}), \tau^*)$

Plus concrètement:

Sur $\bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ on considère la relation d'équivalence engendrée par :

$$[c_{\mathcal{U}}]\sim[c_{\mathcal{V}}] \text{ ssi } \exists\, \tau : \mathcal{V}\to\mathcal{U} \text{ un raffinant tq}$$
$$\tau^*[c_{\mathcal{U}}]=[c_{\mathcal{V}}]$$

$$\check{H}^q(M,\mathcal{F}) = \bigsqcup_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U},\mathcal{F})\Big/_{\sim}$$ est alors un groupe abélien.

<u>Construction</u> :

- On peut définir une relation d'équivalence sur les recouvrements $\mathcal{U}\equiv\mathcal{V}$ ssi $\mathcal{U}$ raffine $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}$ raffine $\mathcal{U}$. Sur l'espace Rev des $\equiv$-classes de recouvrement on peut définir une relation d'ordre par $\bar{\mathcal{U}}<\bar{\mathcal{V}}$ ssi $\mathcal{U}$ raffine $\mathcal{V}$.
- À $\bar{\mathcal{U}}\in$ Rev on associe $H^q(\bar{\mathcal{U}},\mathcal{F}) = H^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ où $\mathcal{U}\in\bar{\mathcal{U}}$ est un représentant de $\bar{\mathcal{U}}$ choisi une fois pour toutes et uniformément en $\mathcal{F}$ (ceci utilise l'axiome du choix)
- Sur $\bigsqcup_{\bar{\mathcal{U}}\in \mathrm{Rev}} H^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$ ~~on conclut~~

$$[c_{\mathcal{U}}]\sim[c_{\mathcal{V}}] \text{ ssi } \mathcal{V}\le\mathcal{U},\ \tau : \mathcal{V}\to\mathcal{U} \text{ raffint et } \tau^*[c_{\mathcal{U}}]=[c_{\mathcal{V}}]$$
$$\text{ou } \mathcal{U}\le\mathcal{V},\ \ldots$$

$$\check{H}^q(M,\mathcal{F}) \simeq \bigsqcup_{\bar{\mathcal{U}}\in \mathrm{Rev}} H^q(\bar{\mathcal{U}},\mathcal{F})\Big/_{\sim}.$$

<u>Lemme</u> :
- $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^0(M,\mathcal{F})$ donne une bijection $\check{H}^0(M,\mathcal{F})\simeq\mathcal{F}(M)$
- $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(M,\mathcal{F})$ est injectif

<u>Rem</u> :
- $H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^q(M,\mathcal{F})$ n'est généralement pas un morphisme injectif de groupes abéliens si $q\ge 2$.

<u>Proposition</u> (Théorème de Leray)

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de Ω et $\mathcal{F}$ un faisceau abélien. Si $\forall\alpha$ $\check{H}^1(\mathcal{U}_\alpha,\mathcal{F})=0$ alors $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(M,\mathcal{F})$ est un isomorphisme :

<u>Preuve</u> : il suffit de montrer la surjectivité. Soit $(c_{\beta\beta'})_{\beta,\beta'\in B}\in Z^1(\bar{\mathcal{V}},\mathcal{F})$ avec $\bar{\mathcal{V}}<\bar{\mathcal{U}}$ $(c_{\beta\beta'})\big|_{\mathcal{U}_\alpha}\in Z^1(\mathcal{U}_\alpha,\mathcal{F})$. Comme $\check{H}^1(\mathcal{U}_\alpha,\mathcal{F})$ $H^1(\mathcal{U}_\alpha\cap\bar{\mathcal{V}},\mathcal{F})=0$ où $\mathcal{U}_\alpha\cap\bar{\mathcal{V}}$ est le recouvrement de $\mathcal{U}_\alpha$ induit par $\mathcal{V}$. Par suite

$$c_{\beta\beta'} = f^{\alpha}_{\beta} - f^{\alpha}_{\beta'} \qquad f^{\alpha}_{\beta} \in \mathcal{F}(U_\alpha \cap V_\beta).$$

sur $U_\alpha \cap U_{\alpha'} \cap V_\beta \cap V_{\beta'}$

$$f^{\alpha}_{\beta} - f^{\alpha}_{\beta'} = c_{\beta\beta'} = f^{\alpha'}_{\beta} - f^{\alpha'}_{\beta'}$$

Donc
$$f^{\alpha'}_{\beta} - f^{\alpha}_{\beta} = f^{\alpha'}_{\beta'} - f^{\alpha}_{\beta'}$$

il existe donc $\gamma_{\alpha\alpha'} \in \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_{\alpha'})$ tq

$$\gamma_{\alpha\alpha'} = f^{\alpha}_{\beta} - f^{\alpha'}_{\beta} \quad \text{sur} \quad V_\beta \cap U_\alpha \cap U_{\alpha'}.$$

$\gamma_{\alpha\alpha'} - \gamma_{\alpha\alpha''} + \gamma_{\alpha'\alpha''} = 0$ sur $U_\alpha \cap U_{\alpha'} \cap V_\beta$.

donc $(\gamma_{\alpha\alpha'})_{\alpha\alpha' \in A} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

$$\gamma_{\tau(\beta)\tau(\beta')} + c_{\beta\beta'} = f^{\tau(\beta)}_{\beta} - f^{\tau(\beta')}_{\beta} + f^{\tau(\beta')}_{\beta} - f^{\tau(\beta')}_{\beta'}$$

sur $V_\beta \cap V_{\beta'}$.

($V_\beta \subset U_{\tau(\beta)}$!)

$$= f^{\tau(\beta)}_{\beta} - f^{\tau(\beta')}_{\beta'}.$$

(noter que $V_\beta \subset U_{\tau(\beta)}$ $\Rightarrow$ $U_{\tau(\beta)} \cap V_\beta = V_\beta$!)

$$= \delta\left(f^{\tau(\beta)}_{\beta}\right)_{\beta \in B}.$$

$c + \tau^* \gamma \in \mathcal{B}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ et donc $[c] + [\tau^* \gamma] = 0$ dans $H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$

Par suite $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ surjectif. $\square$.

(1) algèbre homologique, construction fondamentale.

Lemme du serpent:

Soit
$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\tilde{f}"] & N \arrow[r, "\tilde{g}"] & N'' & \end{tikzcd}$$
un diagramme commutatif de groupes abéliens les lignes étant exactes

On définit $\delta : \operatorname{Ker} d'' \longrightarrow \operatorname{Coker} d'$ de la façon suivante:

Soit $z'' \in \operatorname{Ker} d''$, $d''z''=0$ et $z''=g(z)$ pour $z \in M$

on pose $\zeta = dz$. $\quad \tilde{g}\zeta = 0 \quad$ car $\tilde{g}\zeta = \tilde{g}\, dz = d''g \cdot z = d''z'' = 0$

donc $\zeta = \tilde{f}(\zeta')$ avec $\zeta' \in N'$. On pose

$$\delta z = \zeta' \bmod (d'(M')) \in \operatorname{Coker}(d') = M'/\operatorname{Im}(d')$$

(1) δ est bien défini (ne dépend pas des choix effectués) et est un map de groupes

(2) on dispose d'une suite exacte:

$$\operatorname{Ker}(d') \longrightarrow \operatorname{Ker}(d) \longrightarrow \operatorname{Ker}(d'') \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}(d') \longrightarrow \operatorname{Coker}(d) \longrightarrow \operatorname{coker}(d'')$$

tq le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Ker}(d') \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}(d) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}(d'') \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, "\delta"] & \\ & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\ & \operatorname{Coker} d' \arrow[r] & \operatorname{Coker} d \arrow[r] & \operatorname{Coker} d'' & \end{tikzcd}$$

Remarque: Ce lemme est peut-être le lemme d'algèbre le plus utilisé depuis 1945!

Preuve: (1) le seul arbitraire dans la definition de $\delta z''$ réside dans le choix de z''. Soient deux choix z''_0, z''_1 on a $g(z''_0 - z''_1) = 0$ donc

il existe $z'_{01} \in M'$ $\quad z''_0 - z''_1 = f(z'_{01})$

$\zeta_0 - \zeta_1 = df(z'_{01}) = \tilde{f}\, d' z'_{01}$. comme $\tilde{f}$ injective

$\zeta'_0 - \zeta'_1 = d' z'_{01}$ et donc $\zeta'_0 = \zeta'_1 \bmod \operatorname{Im}(d')$

le fait que δ soit un morphisme est aisément vérifié.

(2) les morph. $\mathrm{Ker}\,d \to \mathrm{Ker}\,d' \to \mathrm{Ker}\,d''$ sont les restrictions de f, g ; idem pour $\mathrm{Coker}(d') \to \mathrm{Coker}(d) \to \cdots$

<u>exactitude à Ker(d)</u>

Soit $z \in \mathrm{Ker}(d)$ tq $g(z)=0$. on a par exactitude en M $z = f(z')$

on a $0 = dz = df(z') = \tilde{f}(dz')$. $\tilde{f}$ injective $\Rightarrow dz' = 0$. donc $z \in f(\mathrm{Ker}\,d)$

<u>exactitude à Coker d</u> (raisonnement dual du précédent!)

Soit $\zeta \in \mathrm{Coker}(d)$ tq $\tilde{g}(\zeta)=0$ c'est à dire $\zeta = \tilde{\zeta} \bmod (\mathrm{Im}\,d)$ $\tilde{\zeta} \in N$

et $\tilde{g}(\tilde{\zeta}) \in \mathrm{Im}(d'')$. $\tilde{g}(\tilde{\zeta}) = d''z''$ avec $z'' \in M''$

$z'' = g(z)$ avec $z \in M$ car g surjectif. de là

$$\tilde{g}(\tilde{\zeta} - dz) = d''z'' - d''gz = 0$$

puis $\tilde{\zeta} - dz \in \tilde{f}(N')$ par exactitude en N. et $\tilde{\zeta} - dz = \tilde{f}(\zeta')$

ainsi $\tilde{\zeta} = \tilde{f}(\zeta' \bmod (\mathrm{Im}\,d))$.

<u>exactitude à Ker d''</u>

Soit $z'' \in \mathrm{Ker}\,\delta$. Soit $z \in M$ tq $z'' = g(z)$ $dz = \tilde{f}(\zeta')$

et $\zeta' = 0 \bmod \mathrm{Im}\,d'$ c'est à dire $\zeta' = dz'$ avec $z' \in N$.

$z_0 = z - f(z')$ verifie $g(z_0) = z$ et

$dz_0 = dz - df(z') = \tilde{f}(\zeta') - \tilde{f}(dz') = 0$.

Donc $z'' = g(z_0)$ avec $z_0 \in \mathrm{Ker}(d)$.

<u>exactitude à Coker d''</u> (raisonnement dual du précédent!).

Soit $\zeta' \in \mathrm{Coker}(d')$ telque $g(\zeta') = 0$ dans $\mathrm{Coker}(d)$

$\zeta' = (\tilde{\zeta}') \bmod (d')M')$ $\tilde{\zeta}' \in N'$ et

$\tilde{f}(\tilde{\zeta}') = dz$ avec $z \in M$.

on a $\tilde{g}(dz) = d''(gz)$ et $\tilde{g}(dz) = g(\tilde{f}(\tilde{\zeta}')) = 0$

donc $g(z) \in \mathrm{Ker}\,d''$. $\delta(g(z)) = \zeta'$ par définition de δ.

Def:

Soient $E^\bullet = (\to E^{i-1} \to E^i \to E^{i+1} \to)$

$F^\bullet = (\to F^{i-1} \to F^i \xrightarrow{d_F^i} F^{i+1} \to \dots)$

deux complexes de groupes abéliens

une collection $f^\bullet = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de morphismes $f^i : E^i \to F^i$ est un morphisme de complexes ssi :

$$d_F^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d_G^i$$

ce qui se représente par le diagr commutatif

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & E^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & E^i \arrow[r] \arrow[d] & E^{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
\arrow[r] & F^{i-1} \arrow[r] & F^i \arrow[r] & F^{i+1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

<u>lemme</u> $f^\bullet$ induit un morphisme $\underline{f}^i : H^i(E^\bullet) \to H^i(F^\bullet)$ $\forall i$

en posant pour $z \in Z^i(E^\bullet)$ $\underline{f}^i(z \bmod B^i) := f^i(z) \bmod B^i(F^\bullet)$

<u>Def:</u> Une 0-suite de complexe $0 \to E^\bullet \to F^\bullet \to G^\bullet \to 0$ est exacte si $\forall i$ $0 \to E^i \to F^i \to G^i \to 0$ l'est.

<u>Proposition :</u> Soit $0 \to E^\bullet \to F^\bullet \to G^\bullet \to 0$ une suite exacte de complexe. Il existe alors une suite exacte longue de la forme

$$\to H^i(E^\bullet) \to H^i(F^\bullet) \to H^i(G^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(E^\bullet) \to H^{i+1}(F^\bullet) \to H^{i+1}(G^\bullet) \to \dots$$

<u>Preuve:</u> On a en effet le diagramme du serpent :

$$\begin{tikzcd}
 & E^i/B^i(E^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "d_E^i"] & F^i/B^i(F^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & G^i/B^i(G^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^i(E^\bullet) \arrow[r] & Z^i(F^\bullet) \arrow[r] & Z^i(G^\bullet) &
\end{tikzcd}$$

(vérifier les exactitudes ....).

~~Corollaire : Soit $E^\bullet, F^\bullet, G^\bullet$ ~~deux~~ trois complexes de groupes abéliens et~~

(g) <u>Suite exacte longue de cohomologie attachée à ~~une~~ une suite exacte courte de faisceaux.</u>

<u>Prop:</u> Soit $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{G} \to 0$ une suite exacte courte de faisceaux (ie $0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{E}_x \to \mathcal{G}_x \to 0$ suite exacte $\forall x \in M$). il existe alors une suite exacte

$$0 \to \check{H}^0(M,\mathcal{F}) \to \check{H}^0(M,\mathcal{E}) \to \check{H}^0(M,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(M,\mathcal{F}) \to \check{H}^1(M,\mathcal{E}) \to \check{H}^1(M,\mathcal{G})$$

<u>Preuve:</u> Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de M. on a une suite exacte

$$0 \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{E}) \to C^q_\lambda(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to 0$$

avec $C^q_\lambda(\mathcal{U},\mathcal{G}) = \mathrm{Im}\,(C^q(\mathcal{U},\mathcal{E}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})) \subset C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$.

et une suite exacte de complexes.

$$0 \to C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{E}) \to C^\bullet_\lambda(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to 0.$$

D'où une suite exacte longue

$$\bullet \to H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{U},\mathcal{E}) \to H^q(C_\lambda(\mathcal{U},\mathcal{G})) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{E}) \to H^{q+1}(C_\lambda(\mathcal{U},\mathcal{G}))$$

on a de plus $H^q(C_\lambda(\mathcal{U},\mathcal{G})) \to H^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ mais rien ne garantit que c'est un isomorphisme .....

En petits degrés on a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overset{\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})}{\overset{\shortparallel}{H^0(M,\mathcal{F})}} \arrow[r] & H^0(M,\mathcal{E}) \arrow[r] & H^0(C^\bullet_\lambda(\mathcal{U},\mathcal{G})) \arrow[dll, "\delta^{\mathcal{U}}"'] \\
& H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "i^{\mathcal{U}}"] \arrow[d, hook] & H^1(\mathcal{U},\mathcal{E}) \arrow[r, "p^{\mathcal{U}}"] \arrow[d, hook] & H^1(C^\bullet_\lambda(\mathcal{U},\mathcal{G})) \arrow[d] \\
& \check{H}^1(M,\mathcal{F}) \arrow[r, "i"] & \check{H}^1(M,\mathcal{E}) \arrow[r, "p"] & H^1(M,\mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

D'autre part $H^0(C^0_\lambda(\mathcal{U},g)) = Z^0(C^0_\lambda(\mathcal{U},g)) \subseteq Z^0(\mathcal{U},g) = \check{H}^0(\mathcal{U},g) = H^0(M,g)$

de plus si $(f_\alpha)_{\alpha\in A} \in C^0(\mathcal{U},g)$ alors $f_\alpha \in g(\mathcal{U}_\alpha)$

$\exists$ $(\mathcal{V}_\beta)_{\beta\in B(\alpha)}$ ouvert tq $f_\alpha|_{\mathcal{V}_\beta} \in \mathrm{Im}(\mathcal{F}(U_\beta)\to \mathcal{G}(U_\beta))$

ie $f_\alpha|_{\mathcal{V}_\beta} \in g_\lambda(\mathcal{U}_\beta)$

donc $(\mathcal{V}_\beta)_{\beta\in \cup B(\alpha)}$ est un recouvt ouvert de M et $\tau : \underset{B(\alpha)}{\underset{\cap}{\beta}} \longmapsto \alpha$

est une raffinement.

Donc $\tau^*(f_\alpha)_{\alpha\in A} = (f_\alpha|_{\mathcal{V}_\beta})_{\beta\in \cup_\alpha B(\alpha)} \in C^0_\lambda(\mathcal{V},g)$.

Donc $\bigcup_{\mathcal{V}} H^0(C^0_\lambda(\mathcal{U},g)) = H^0(M,g)$.

La construction de $\delta^{\mathcal{U}}$ est fonctorielle et donc $\tau^*\circ\delta^{\mathcal{U}} = \delta^{\mathcal{V}}\circ\tau^*$ si $\tau\, \mathcal{V}\to\mathcal{U}$ raff.

Par suite on a bien defini une 0-suite

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(M,\mathcal{F}) \arrow[r] & H^0(M,\mathcal{E}) \arrow[r] & H^0(M,\mathcal{G}) \arrow[dll, "\delta"] \\
& \check{H}^1(M,g) \arrow[r] & \check{H}^1(M,\mathcal{E}) \arrow[r] & \check{H}^1(M,\mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

l'exactitude en $H^0(M,\mathcal{F})$, $H^0(M,\mathcal{E})$ est claire.

- en $H^0(M,\mathcal{G})$ soit $z\in H^0(M,\mathcal{G})$ $\exists\, \mathcal{U}$ $z\in H^0(C_\lambda(\mathcal{U},\mathcal{G}))$ et $\delta z = 0 \Rightarrow \delta^{\mathcal{U}} z = 0$.
- en $H^1(M,\mathcal{F})$ soit $\xi\in H^1(M,\mathcal{G})$ $\exists\, \mathcal{U}$ $\xi\in H^1(\mathcal{U},\mathcal{G})$

  si $i(\xi)=0$ il suit que $i^{\mathcal{U}}(\xi)=0$. donc $\xi = \delta\chi$ avec $\chi\in H^0_\lambda(\mathcal{U},\mathcal{G}) \subset H^0(M,\mathcal{G})$.
- en $H^1(M,\mathcal{E})$ soit $\zeta\in H^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$ tq $p(\xi)=0$ dans $H^1(M,\mathcal{G})$

  alors ζ vient d'un cocycle $\xi\in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$ et $p^{\mathcal{U}}(\xi)\in \cancel{\mathrm{Ker}}\, Z^1_\lambda(\mathcal{U},\mathcal{G})$

  s'annule dans $H^1(M,\mathcal{G})$, c'est à dire $\exists\, \mathcal{V}$ un raffnt de $\mathcal{U}$ tq

  $p^{\mathcal{V}}(\xi)\in B^1(\mathcal{V},\mathcal{G})$. On peut donc supposer

  ξ vient de $\xi\in Z^1(\mathcal{V},\mathcal{E})$ tq $\underset{\xi}{\underset{\shortparallel}{p^{\mathcal{V}}(\xi)}} \in Z^1_\lambda(\mathcal{V},\mathcal{G})\cap B^1(\mathcal{V},\mathcal{G})$.

$c = \delta\gamma \qquad \gamma \in C^0(\mathcal{V}, \mathcal{G})$

mais $\exists\, \mathcal{W} \xrightarrow{\tau} \mathcal{V}$ un raffinement tel que

$\tau^*\gamma \in C^0_\lambda(\mathcal{V}, \mathcal{G})$. de là

$\tau^*\xi$ vérifie $\tau^* p^{\mathcal{V}}(\xi) = p^{\mathcal{W}}(\tau^*\xi) = \delta\, \tau^*\gamma$

et $\tau^*\xi \quad p^{\mathcal{W}}(\tau^*\xi) = 0$ dans $H^1(C^\bullet_\lambda(\mathcal{W}, \mathcal{G}))$.

Donc $\quad \xi = i(\eta)$ avec $\eta \in H^1(\mathcal{W}; \mathcal{F})$. $\square$.

<u>Théorème</u>: Supposons M <u>paracompact</u> (tout recouvrement ouvert a un sous recouvrement localement fini) alors pour toute s.o.c $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{G} \to 0$ on a une suite exacte longue:

$$0 \to \check{H}^0(M, \mathcal{F}) \to \check{H}^0(M, \mathcal{E}) \to \check{H}^0(M, \mathcal{G}) \to \cancel{H^1(M, \mathcal{E})}$$
$$\to \check{H}^1(M, \mathcal{F}) \to \check{H}^1(M, \mathcal{E}) \to \check{H}^1(M, \mathcal{G}) \to$$
$$\to \check{H}^2(M, \mathcal{F}) \to \check{H}^2(M, \mathcal{G}) \to$$

<u>Preuve</u>: il faut voir que si M paracompact

$\varinjlim_{\mathcal{V}} \check{H}^q(C^0_\lambda(\mathcal{V}, \mathcal{G})) = \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{G})$. C'est vrai et assez délicat à voir.

<u>Plus généralement</u> Nous admettons qu'il existe une façon de définir naturellement $H^q(M, \mathcal{F})$ et δ pour tout espace topologique M.

On a toujours une application $\check{H}^q(M, \mathcal{F}) \to H^q(M, \mathcal{F})$ qui dans certains cas pathologiques n'est pas un isomorphisme (cf Godement, théorie des faisceaux).