UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER
UFR DE MATHÉMATIQUES

L3 MENTION MATHÉMATIQUES, UE MAT367
MÉTHODES NUMÉRIQUES
2ND SEMESTRE 2009-2010

DEVOIR DU 06/04/2010,
À RENDRE POUR LE MARDI 20/04/2010.

Les réponses données doivent être soigneusement justifiées pour pouvoir être prises en compte.

Exercice 1. *(extrait d'examen Mat367, 2007-2008)*
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3 et $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tel que $g(\overline{x}) = 0$ et $g'(\overline{x}) \neq 0$. On se donne également $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$.
Etant donné $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(\varphi(x_n))} \qquad (*)$$

(1) *Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x_0 \in I_\alpha =]\overline{x} - \alpha, \overline{x} + \alpha[$, alors la suite $(*)$ est bien définie. Montrer aussi que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{x}$.* Indication: on pourra poser $h(u) = u - g(u)/g'(\varphi(u))$ et vérifier qu'on peut choisir α de sorte que $|h'(\alpha)| < 1$ sur I_α.
Dans la suite de l'exercice, on prendra $x_0 \in I_\alpha$ où α est comme ci dessus.

(2) *On suppose maintenant que φ est de classe C^2. Montrer que la convergence de la suite (x_n) est au moins quadratique, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que*
$$|x_{n+1} - \overline{x}| \leq C|x_n - \overline{x}|^2$$
pour tout $n \geq 1$.

(3) *On suppose que φ est de classe C^3 et $\varphi'(\overline{x}) = \frac{1}{2}$. Montrer que la convergence est au moins cubique, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que*
$$|x_{n+1} - \overline{x}| \leq C|x_n - \overline{x}|^3$$
pour tout $n \geq 1$.

(4) *Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I_\beta =]\overline{x} - \beta, \overline{x} + \beta[$. On suppose g de classe C^4. Montrer que si on prend φ telle que*
$$\varphi(x) = x - \frac{g(x)}{2g'(x)}$$

pour $x \in I_\beta$, alors la convergence de la suite (x_n) est au moins cubique.

Exercice 2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on suppose donnée $A_k \in C^0(\Omega, GL_n(\mathbb{R}))$.

Soit $\vec{x}_0 \in \Omega$ on désire étudier une suite $(\vec{x}_n)$ vérifiant une relation de la forme:

$$\forall k \geq 0, \quad \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - A_k(\vec{x}_{k'})^{-1} F(x_k)$$

k' étant assujetti à vérifier $0 \leq k' \leq k$.

On suppose qu'il existe $\beta, M, r \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que:

(1) *$r > 0$ et $B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \ \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\} \subset \Omega$,*
(2) *$\sup_{k \geq 0} \sup_{\vec{x} \in B} \|A_k(\vec{x})^{-1}\|_{op} \leq M$,*
(3) *$\beta < 1$ et $\sup_{k \geq 0} \sup_{\vec{x}, \vec{x}' \in B} \|A_k(\vec{x}) - J_F(\vec{x}')\|_{op} \leq \frac{\beta}{M}$.*
(4) *$\|F(\vec{x}_0)\| \leq \frac{r}{M}(1 - \beta)$.*

On va montrer que F a un unique zéro $\vec{x}_\infty$ dans B et que $(\vec{x}_k)$ converge vers $\vec{x}_\infty$.

(1) *Montrer que $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| \leq M\|F(\vec{x}_0)\|$ puis que $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| < r$.*
(2) *En appliquant le théorème des accroissements finis à $\Psi_0 : \vec{x} \mapsto F(\vec{x}) - A_0(\vec{x}_0)\vec{x}$ montrer que:*
$$\|F(\vec{x}_1)\| \leq \frac{\beta}{M}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\|.$$
(3) *Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a:*
   - *$\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq M\|F(\vec{x}_{k-1})\|$,*
   - *$\|\vec{x}_k - \vec{x}_0\| < r$,*
   - *$\|F(\vec{x}_k)\| \leq \frac{\beta}{M}\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\|$.*
(4) *Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a: $\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| \leq \beta\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\|$.*
(5) *Montrer que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément de B qui est un zéro de F. Estimer la vitesse de convergence.*
(6) *Montrer que F a un unique zéro dans B. (Indication: on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à Ψ_0.)*

Problème 3. *(extrait d'examen Mat352, L3 Sena Centre-Drôme-Ardèche 2007-20008.)*
On considère la méthode d'intégration numérique sur $[0, 1]$ définie par:

$$\forall f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \quad I(f) = \frac{1}{2}(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})).$$

(1) *Calculer $I(f)$ pour f un polynôme du second degré.*
(2) *Quel est l'ordre de cette méthode d'intégration numérique?*
(3) *Calculer le noyau de Péano de I qui est la fonction G définie pour tout $t \in [0, 1]$ par:*
$$G(t) = \int_0^1 e_t(x)dx - I(e_t)$$
où $e_t \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est définie par $e_t(x) = (x - t)_+ = \max(x - t, 0)$.
(4) *Montrer que*
$$\forall f \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \ \ \forall x \in [0, 1] \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x (x - t)f''(t)dt.$$

(5) *Montrer que*

$$\forall f \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \quad \int_0^1 f(x)dx - I(f) = \int_0^1 G(t)f''(t)dt.$$

(6) *Montrer que* $\forall t \in [0,1]$, $G(t) \geq 0$.

(7) *Montrer que*

$$\forall f \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \;\; \exists c \in [0,1] \quad \int_0^1 f(t)dt - I(f) = (\int_0^1 G(t)dt)f''(c).$$

(8) *Calculer* $\int_0^1 G(t)dt$ *(Indication: On pourra par exemple appliquer la formule précédente à* $x \mapsto x^2$*.).*

(9) *On considère, pour tout* n *entier la méthode d'intégration numérique sur* $[0,1]$ *définie par:*

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2n}(f(\frac{1+3i}{3n}) + f(\frac{2+3i}{3n})).$$

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ *telle que:*

$$\forall f \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \quad |\int_0^1 f(t)dt - I_n(f)| \leq \frac{C}{n^2} \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|.$$

(10) *Quelle est la constante* C *optimale pour la question précédente?*