$\underline{p=1}$ $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i|+|y_i|)$ ($\leq \Delta$ dans $\mathbb{R}$)

$= \|x\|_1 + \|y\|_1$

$\underline{p=+\infty}$ $\|x+y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i+y_i| \overset{\leq \Delta \text{ dans } \mathbb{R}}{\leq} \max_{1\leq i \leq n} (|x_i|+|y_i|) \overset{\text{détailler}}{\leq} \max_j |x_j| + \max_j |y_j|$

$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

Si $1 \leq p < +\infty$, $\|x\|_\infty^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq n.\|x\|_\infty^p$

donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \underbrace{n^{1/p}}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 1} \|x\|_\infty$ dc $\|x\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$ $\square$

module Minkowski

Rq le module sur $\mathbb{C}$ correspond à la norme eucl sur $\mathbb{R}^2$.

Rq. + généralement, si $(E_1, \|\|_1) \ldots (E_n, \|\|_p)$ sont des espaces vect. normés

$(E_1 \times \ldots \times E_n, \|.\|)$ en est un pour $d\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i^p\right)^{1/p}$

## Preuve de l'inégalité $\Delta$ pr $\|\ \|_p$ ds $\mathbb{R}^n$

**Etape 1** (Inégalité de Young) Soient $1 < p, q < \infty$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Alors $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Preuve opsq $a, b > 0$ (sinon évident)

Notons $\alpha = p\ln(a) = \ln(a^p)$, $\beta = q\ln(b)$

Alors $ab = e^{\frac{\alpha}{p}} e^{\frac{\beta}{q}} = \exp\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}\right) \leq \frac{1}{p}e^\alpha + \frac{1}{q}e^\beta = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ $\square$

convexité de la fonction exponentielle

**Etape 2** (Inégalité de Hölder) mêmes hyp.

Alors $\forall x, y \in \mathbb{K}^n$, on a : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \underbrace{\left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}}_{\|x\|_p} \underbrace{\left(\sum |y_i|^q\right)^{1/q}}_{\|y\|_q}$

Rq : pour $p=2$, on reconnaît l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Sous la seconde forme, elle reste valable pour $p=1, q=\infty$

Dém opsq $x, y \neq 0$ (sinon évident)

Quitte à remplacer $x$ par $\frac{x}{\|x\|_p}$ et $y$ par $\frac{y}{\|y\|_q}$ (l'in. est vraie ssi elle l'est pour l'une ou l'autre des paires), opsq $\|x\|_p = 1$ et $\|y\|_q = 1$.

Dans ce cas, en appliquant Young, on trouve

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ ! \quad \square$$

Et enfin

**Proposition** (inégalité de Minkowski)

Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors $\forall x, y \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}, \text{ ie}$$

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$ (aussi vrai pour $p = 1, +\infty$, déjà vu)

Dém (cas $1 < p < +\infty$) notons $q = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

osq $x + y \neq 0$, sans quoi il n'y a rien à démontrer.

On a alors $\sum |x_i + y_i|^p = \sum |x_i + y_i|^{p-1} \times |x_i + y_i| \leq \sum |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|$

On applique Hölder aux deux dernières sommes :

$$\sum |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| \leq \left(\sum |x_i + y_i|^{\frac{p}{p-1} \times p-1}\right)^{1/q} \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x+y\|_p^{\frac{p-1}{p}} \|x\|_p$$

et même chose pour l'autre somme, ce qui donne

$\|x+y\|_p^p \leq \|x+y\|_p^{p-1} (\|x\|_p + \|y\|_p)$ soit, en divisant par $\|x+y\|_p^{p-1} > 0$,

l'inégalité voulue $\square$

**Proposition** (équivalence des normes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq q \leq +\infty$

Alors $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\quad \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \|x\|_q \cdot n^{\underbrace{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}_{>0}}$

(De façon générale, on dit que deux normes sont équivalentes si ...)

Preuve : On peut bien sûr supposer $p<q$. Le cas $q=\infty$ a déjà été étudié. On supposera donc $1 \leq p < q < +\infty$.

i) $\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^m |x_i|^p = \sum_{i=1}^m \underbrace{|x_i|^p}_{q/p} \times \underbrace{1}_{q/q-p}$ $\qquad \frac{p}{q} + \frac{q-p}{q} = \frac{q}{q} = 1$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^{p \times q/p}\right)^{p/q} \times \left(\sum_{i=1}^m 1\right)^{\frac{q-p}{q}}$$

$$= \|x\|_q^p \times m^{1-p/q}$$

$$\text{donc } \|x\|_p \leq \|x\|_q \times m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

ii) $\|x\|_q^q = \sum |x_i|^{q-p} \cdot |x_i|^p \leq \|x\|_\infty^{q-p} \|x\|_p^p$

$$\Rightarrow \|x\|_q \leq \underbrace{\|x\|_\infty^{1-\frac{p}{q}}}_{\leq \|x\|_p} \cdot \|x\|_p^{p/q} \leq \|x\|_p \qquad \square$$

## (B) Espaces de fonctions (dimension $\infty$)

**Proposition** Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et $E = C(I, \mathbb{K})$. Si $f \in E$, on définit

- $\|f\|_p = \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p}$ si $1 \leq p < +\infty$
- $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| = \max_{x \in I} |f(x)|$ (cf chap 1)

Alors $\forall p \in [1, +\infty]$, $f \longmapsto \|f\|_p$ est une norme sur $E$ (norme $L^p$)

et $\forall f \in E$ on a $\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p$

Dem : On ne présente pas les détails car la preuve est très similaire à celle des norme $\|\ \|_p$ sur $\mathbb{K}^m$. Pour mq $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur $E$, le seul pt délicat est l'inégalité triangulaire pour $1<p<\infty$. Comme ci-dessus, elle s'obtient grâce à l'inégalité de Hölder (version $\int$) :

$$\left|\int_I f(x) g(x)\, dx\right| \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \text{si } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Celle-ci n'est difficile que pour $1<p,q<\infty$, on peut la démontrer en suivant point par pt la preuve ds $\mathbb{K}^n$ (remplacer $\Sigma$ par $\int$) ou en approchant les $\int$ par des $\Sigma$ de Riemann. II.b

La preuve de $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ diffère notablement du cas discret car les normes ne sont plus équivalentes (voir ci-après)

On suppose $f\neq 0$ sans quoi il n'y a rien à démontrer

i) $\int_I |f|^p \leq \|f\|_\infty^p |I| \Rightarrow \|f\|_p \leq |I|^{1/p} \|f\|_\infty$ (où $|I| = b-a>0$)

donc $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ ($\times \limsup |I|^{1/p} = 1$)

ii) Etant donné $\varepsilon \in ]0,1[$, il existe un intervalle $J\subset I$ d'intérieur non nul tq $|f(x)| \geqslant (1-\varepsilon)\|f\|_\infty \ \forall x\in J$ (sup atteint + continuité au voisinage de ce pt)

Alors $\int_I |f|^p \geqslant \int_J |f|^p \geqslant \|f\|_\infty^p (1-\varepsilon)^p |J|$

donc $\|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty (1-\varepsilon)|J|^{1/p}$ Ainsi $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geqslant (1-\varepsilon)\|f\|_\infty$

Ceci étant vrai pour $\forall \varepsilon$, $\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty$, ce qui conclut $\square$

---

Rq Contrairement à la dim finie, On n'a pas équivalence des normes $L^p$ :
On a $\forall f$, si $p\leq q$, $\|f\|_p \leq \|f\|_q |I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ (par Hölder, comme avant)
mais la preuve de l'autre inégalité ne marche pas et de fait
Exo si $p<q$, on peut trouver une suite $(f_n)$ tq $\|f_n\|_p < 1 \ \forall n$ et $\|f_n\|_q \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

---

Encore + général (là on avait des fonctions de $I$ (segment) ds $\mathbb{R}$. considérons les fonctions de $X$ (qcq) dans un evn $E$ qui sont bornées

ie que $\{\|f(x)\|, x\in X\} \subset \mathbb{R}_+$ est borné.

Elles forment un EVN, noté $B(X,E)$, que l'on peut munir (comme $C(I,\mathbb{R})$) de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E$

Aff $(B(X,E), \|\,\|_\infty)$ est un EVN.

On verra que ses propriétés dépendent de celles de $X$.