Complément sur l'exercice 1, feuille 5

Justification de la différentiabilité (on prouverait la continuité par les mêmes arg^{ts})

1) $f(x,y) = x^3 + x^2 \sin(xy)$

- $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy \end{array}$, $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 \end{array}$ et $f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^3 \end{array}$

  sont polynomiales donc différentiables en tout point de $\mathbb{R}^2$

- $\sin : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto \sin(z) \end{array}$ est dérivable donc différentiable.

- $f = f_3 + f_2 \times \sin \circ f_1$ est donc différentiable par composition, produit et somme

---

2) $f(x,y) = x^4 e^y$

- $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^4 \end{array}$ est différentiable,

- $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto y \end{array}$ aussi, ainsi que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  donc par composition, $\exp \circ f_2$ aussi

(Remarque : par le même argument, on montre que, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est diff., et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de la forme : $h(x,y) = g(x)$ ou $h(x,y) = g(y)$ alors h est elle aussi différentiable)

- par produit, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

3) Rappel $\mathcal{D}om(f) = \underset{\|\cdot\|_2}{\mathcal{B}}((0,0),1)$

- $g : \mathcal{D}om(f) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$
  $(x,y) \longmapsto 1-\|(x,y)\|_2^2 = 1-x^2-y^2$ est polynomiale donc différentiable

- $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable donc différentiable

- Donc par composition (on a bien vérifié que $g(\mathcal{D}om(f)) \subset \mathbb{R}_+^*$ où $\ln$ est différ.) f est différentiable sur $\mathcal{D}om(f)$.

(Voir 6) pour une rédaction un peu différente)

4) Rappel $\mathcal{D}om(f) = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$

$f_1 : \mathcal{D}om(f) \subset \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est polynomiale donc différentiable.
$(x,y) \longmapsto x^2+y^2$

$\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dérivable (⚠ au domaine de définition)
$z \longmapsto \sqrt{z}$ donc différentiable

Donc la composée $(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est différentiable sur $\mathcal{D}om(f)$

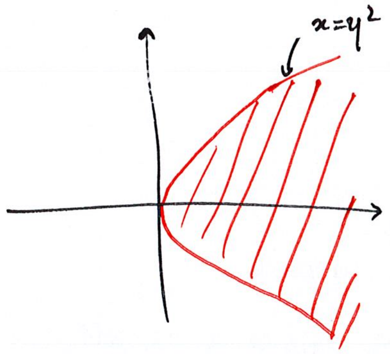
Donc par somme, $\mathcal{D}om(f) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ ($\leftarrow$ c'est comme ça qu'on a déterminé $\mathcal{D}om(f)$)
$(x,y) \longmapsto x+\sqrt{x^2+y^2}$

est différentiable.

Comme en outre $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable donc différentiable,

$f : \mathcal{D}om(f) \to \mathbb{R}$ est différentiable en tt point de $\mathcal{D}om(f)$.

5) <u>Rappel</u> $\mathcal{D}om(f) =$



(bord inclus)

On ne parle de différentiabilité que sur un <u>ouvert</u> donc on étudie la différentiabilité de f que sur $U = \mathrm{Int}(\mathcal{D}om(f)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2\}$

cf feuilles de TD précédentes

$$g : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (x,y) \longmapsto x - y^2 \end{array}$$ est polynomiale donc différentiable,

$\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable donc différentiable, donc par composition, $f = \sqrt{g}$ est différentiable <u>en tout point de U</u>.

---

6) Commençons par déterminer $\mathcal{D}om(f)$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in \mathcal{D}om(f) \iff \sin(x-y) > 0$$
$$\iff x - y \in]0, \pi[+ 2\pi\mathbb{Z}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } x - y \in]2k\pi, 2k\pi + \pi[$$

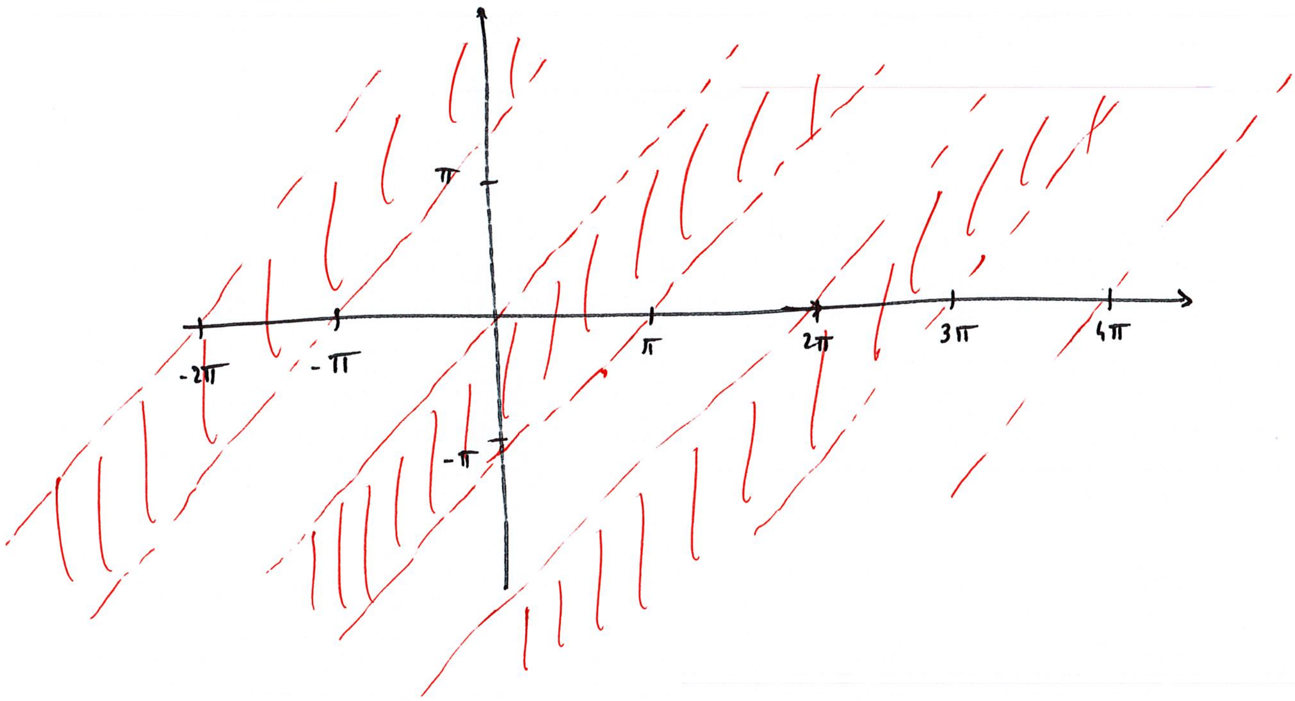
Notons $U_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in]2k\pi, (2k+1)\pi[\}$

$$\Updownarrow$$

$$2k\pi < x - y < (2k+1)\pi$$

U_k est la bande ouverte (bord exclus) délimitée par les droites affines d'équation $x - y = 2k\pi$ et $x - y = (2k+1)\pi$
(ie $y = x - 2k\pi$) (ie $y = x - (2k+1)\pi$)

et $\mathcal{D}om(f)$ est la réunion de ces bandes :



$f_1 : \mathcal{D}om(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale donc différentiable
$(x,y) \longmapsto x-y$

<u>et</u> $f_1(\mathcal{D}om f) \subset]0,\pi[+2\pi\mathbb{Z}$

$\sin :]0,\pi[+2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable donc différentiable et

$\sin(]0,\pi[+2\pi\mathbb{Z}) \subset \mathbb{R}_+^*$

$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable donc différentiable

Donc par composition (la cohérence des différents ensembles de départ et d'arrivée ayant été justifiée), f est différentiable sur $\mathcal{D}om f$).