

VRAI / FAUX

Pour chacune des assertions suivantes, dites si elle est vraie ou fausse et justifiez votre réponse (si elle est vraie, démontrez-la, si elle est fausse, donnez un contre-exemple).

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de nombres réels.

Assertion 1 : Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum v_n$ converge

Assertion 2 : $(u_n)_n$ converge $\Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_{n+1}$

Assertion 3 : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_{n+1} \Rightarrow (u_n)_n$ converge

On suppose maintenant que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites de réels strictement positifs et que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Assertion 4 : $\sqrt{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$

Assertion 5 : $u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n - 1$

Assertion 6 : $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$

Assertion 7 : $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n}$

Soit de plus f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Assertion 8 : $(f(u_n))_n$ converge $\Rightarrow (u_n)_n$ converge

Question/Assertion bonus : $(f(u_n))_n$ converge $\Rightarrow (f(v_n))_n$ converge

~~Assertion 9 : Si f est C^0 sur $(a, b] \subset \mathbb{R}$ et φ est sur $(c, d) \subset \mathbb{R}$ avec $\varphi(c, d) = [a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$~~