Chap 2 : Espaces métriques
Espaces vectoriels normés
Espaces préhilbertiens

On va commencer, dans les 3 1^{ers} §, par def ces 3 types d'espaces, puis on généralisera les concepts du chap 1 à ce cadre. Un rôle important sera joué ici par les boules, qui viennent remplacer les intervalles de $\mathbb{R}$. Elles permettront de def les voisinages dans un tel espace. Dans le chap suivant, on verra que pour def une notion de lim sur un ensemble, on n'a en fait pas besoin de distance, mais juste de fixer au départ ce qu'on appelle les voisinages. C'est ça la topo générale !
le formalisme de

§1 Espaces métriques

Def Soit E un ensemble. On appelle distance sur E toute application $d : E\times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) (symétrie) $\forall x,y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$

(ii) (séparation) $\forall x,y \in E,\ (d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y)$

(iii) (inég. Δ) $\forall x,y,z \in E,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Le couple (E,d) est appelé espace métrique

Ex 1) (distance usuelle sur $\mathbb{R}$) $d(x,y) = |y-x|$ (où $|.|$ est la valeur absolue)

L'inégalité triangulaire se vérifie à partir des axiomes de corps ordonné en distinguant les cas. Spdg opsq $x<y$.

• si $x \leq z \leq y$, • si $z \leq x < y$, • si $x<y \leq z$ ...

2) Sur n'importe quel ensemble, on peut définir la distance discrète δ par $\forall x,y \in E,\ \delta(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x=y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$

Vérifier qu'elle satisfait les prop (i) à (iii) !

Pour cette distance, ts les pts sont "isolés" (on mettra un sens précis là dessus + tard) : il n'y a pas de pts à une distance ≤ 1 d'un pt donné

3) ~~le corps $\mathbb{C}$ des nb complexes.~~

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de 2 lois de compositions :

- addition $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$
- multiplication $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

On vérifie que cela définit un corps. L'élément neutre pour l'addition est $(0,0)$ et celui pour la mult est $(1,0)$.

Notations usuelles : $0 = (0,0)$, $1 = (1,0)$, $i = (0,1) \to i^2 = -1$

$\hookrightarrow \mathbb{C} = \{a+ib, \ a,b \in \mathbb{R}\}$
$(a.1 + b.i)$

Si $\underset{a+ib}{z} \in \mathbb{C}$, on note $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ le <u>module</u> de z

On vérifie que $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ définit une distance sur $\mathbb{C}$
(on peut le vérifier directement par calcul en utilisant CS ou géométriq^t mais on va voir un argument général ci-dessous) (norme/produit scalaire)

4) On peut aussi <u>"distordre"</u> une distance sur $\mathbb{R}$ en prenant une fct strictement monotone $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et en posant $d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$

<u>intérêt</u> : ex : si $\varphi = \arctan$, on se retrouve avec une distance bornée par π. On peut tjs faire ça. (cf TD)

5) <u>distance induite</u> ex : $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$
Si (E,d) est un espace métrique alors $\forall A \subset E$, $(A, d_{|A\times A})$ est aussi un espace métrique. ⚠ différent de la distance géodésique sur $\mathbb{S}^2$, cf TD.

<u>Déf</u> Si (E,d) est un espace métrique et $A \subset E$, on appelle <u>diamètre de A</u> la quantité
$$\mathrm{diam}(A) = \begin{cases} \sup\{d(x,y),\ x,y \in A\} \in [0, +\infty] & \text{si } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } A = \emptyset \end{cases}$$

On dit que A est <u>borné</u> si $\mathrm{diam}(A) < +\infty$, et que <u>la distance</u> elle-même est <u>bornée</u> si $\mathrm{diam}(E) < +\infty$.

<u>Rq</u> - le caractère borné ou non <u>dépend</u> de la distance choisie ! (cf $\mathbb{R}$)

- $\mathrm{diam}(A) < +\infty$ n'implique pas l'existence de $x,y \in A$ tq $d(x,y) = \mathrm{dia}$[m(A)]
là encore le sup n'est pas forcément atteint.
<u>ex</u> $]0,1[\subset \mathbb{R}$ (distance usuelle)

Exo

Exo Si (E,d) est un esp. mét, alors les fct° $d_i : E\times E \to \mathbb{R}_+$ déf par
$$d_1 = \frac{d}{1+d},\ d_2 = \max(1,d),\ d_3 = \log(1+d)$$ sont encore des distances (et les 2 1ères sont bornées)

Déf Si (E,d) est un espace métrique et $A \overset{\neq\emptyset}{\subset} E$, alors $\forall x \in E$ on définit la distance de x à A par
$$\mathrm{dist}(x,A) = \inf\{d(x,y),\ y \in A\} \geq 0$$
(on pourrait poser $\mathrm{dist}(x,\emptyset) = +\infty\ \forall x \in E$)

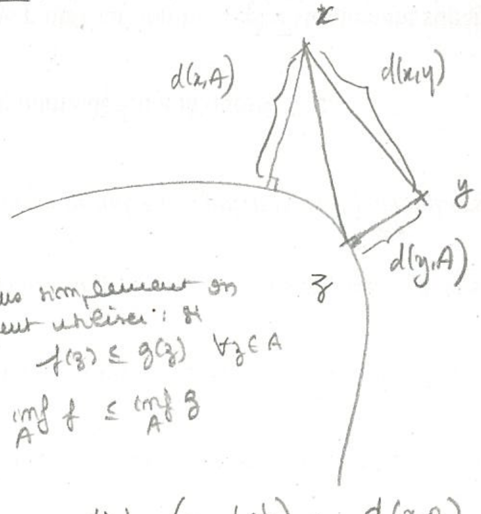
Exo

⚠ A nouveau, l'inf n'est pas nécessairement atteint. En effet
$x \in A \Rightarrow d(x,A) = 0$ mais $d(x,A) = 0 \not\Rightarrow x \in A$.
Trouver un exemple

ex dans le plan $d(z, \Delta) = |z - z'|$ où z' proj $\perp$ de z sur Δ (droite)
(on le prouvera + tard dans un cadre + général) (dans ce cas l'inf est atteint)

Prop Soit (E,d) un e.m. et $\emptyset \neq A \subset E$. Alors
$$\forall x,y \in E,\ |d(x,A) - d(y,A)| \leq 1\times d(x,y)$$
On dit que $d(\cdot, A)$ est lipschitzienne (de rapport 1)

Preuve



Plus simplement on peut utiliser : si $f(z) \leq g(z)\ \forall z \in A$
$\inf_A f \leq \inf_A g$

spdg supposons que $d(x,A) \geq d(y,A)$

$\forall z \in A,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
En particulier, soit $\varepsilon > 0$ et $z \in A$ tq $d(y,z) \leq d(y,A) + \varepsilon$

Alors $d(x,A) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,A) + \varepsilon$
ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$,
$0 \leq d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$ □

Comme $\mathrm{dist}(x,\{z\}) = d(x,z)$ on obtient en posant $A = \{z\}$

Corollaire (Inégalité triangulaire inverse) $\forall x,y,z \in E$,
$$d(x,y) \geq |d(x,z) - d(z,y)|$$

Interprétat° géom ds $\mathbb{R}^2$: dans un triangle aucun côté
- n'est + gd que la somme des 2 autres
- n'est + petit que la différence

On peut aussi définir $d(A,B)$ pour des sous-ensembles non vides A & B d'un espace métrique (E,d) :

Déf $\boxed{d(A,B) = \inf \{ d(x,y) \mid x \in A, y \in B \} \geq 0}$

(A nouveau on peut poser $d(A,B) = +\infty$ si A ou $B = \emptyset$

(100) Rq : . $d(A,B) = \inf_{x \in A} d(x,B) = \inf_{y \in B} d(y,A)$

- $d(\{x\}, A) = d(x,A)$
- Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $d(A,B) = 0$, mais la réciproque n'est pas vraie (trouver un exemple)
- la distance est une fonction décroissante de A et B pour l'inclusion

⚠ ne pas confondre avec la distance sur l'ensemble des parties d'un espace métrique. (cf TD)

Exercice. $\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) + \text{dist}(A,B)$
donner un cas d'inégalité stricte.

Avant de passer à 2 classes d'ex importantes, un ex où on construit un nouvel espace métrique à partir d'un autre : distance uniforme sur les fonctions bornées

Déf $\boxed{\begin{array}{l}\text{Soient } (E,d) \text{ un e.m et } X \text{ un ensemble (qcq, non vide). On dit} \\ \text{qu'une application } f : X \to E \text{ est bornée (pour la distance } d) \\ \text{si son image } f(X) = \{f(x), x \in X\} \text{ est un ss-ens. borné de } (E,d). \\ \text{On note } B(X,E) \text{ l'ensemble des applications bornées de } X \text{ dans } E.\end{array}}$

Si $f, g \in B(X,E)$, on définit

$$\delta(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \underset{(*)}{<} +\infty$$

(*) en effet, étant donné $x_0 \in X$, on a, $\forall x \in X$

$$\begin{aligned} d(f(x),g(x)) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) + d(g(x_0), g(x)) \\ &\leq \underbrace{\text{diam}(f(X))}_{<+\infty} + d(f(x_0), g(x_0)) + \underbrace{\text{diam}(g(X))}_{<+\infty} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

(100) Alors δ est une distance sur $B(X,E)$, appelée parfois distance uniforme

§2 Espaces vectoriels normés

Espaces particuliers munis d'une distance particulière et où il sera notamment intéressant de considérer les applications continues linéaires.

Rappels $\boxed{\text{def d'ev}}$ Soit $\mathbb{K}$ un corps. On appelle ev sur $\mathbb{K}$ un ens E muni d'une opérat° $+$ et d'une action $\cdot$ de $\mathbb{K}$ sur E tq :

a) $(E,+)$ est un groupe ab. (d'élt neutre noté 0_E)

b) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot x = x \\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x) \end{array}\right\} \text{action} \quad (\cdot : \mathbb{K}\times E \to E)$$

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \lambda(x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \end{array}\right\} \text{compatibilité.}$$

Les élts de E sont appelés "vecteurs", ceux de $\mathbb{K}$ "scalaires"

Ex
1) $\mathbb{K}$ lui-même
2) $E = \underbrace{\mathbb{K}\times \dots \times \mathbb{K}}_{n \text{ fois}} = \mathbb{K}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec $+$ et $\cdot$ def de façon évidente
3) $\mathbb{K}^X$ où X ensemble qcq (espace de fonctions)
4) $E = \{0\}$

Dans la suite on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{Def (norme)}}$ Une norme sur un $\mathbb{K}$ev E est une application $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \|x\| \end{array}$ tq

(i) (séparation) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

(ii) (homogénéité) $\|\lambda . x\| = |\lambda| . \|x\|$ $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K}\times E$

(iii) (inég Δ) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall (x,y) \in E^2$

On dit que $(E, \|.\|)$ est un ev normé

C'est bien sûr le cas des normes que vous connaissez bien (euclidiennes) cf ci-après

Rq (i) et (ii) impliquent $\|x\| \geq 0$ ac égalité ssi $x = 0$.

ex $|.|$ sur $\mathbb{R}$

Prop (norme → distance) Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn et si d est def par II.6

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+, \quad (x,y) \mapsto \|x-y\|$$

alors d est une distance, dc

Exo

(E,d) est un espace métrique

Mais toute distance n'est pas induite par une norme. Celles-ci ont des propriétés particulières :

- invariance par translation $(d(x+z, y+z) = d(x,y))$
- "homogénéité" $(d(\lambda x, 0) = |\lambda| d(x,0))$

Exo

et en fait cela les caractérise.

Notamment si $E \neq \{0\}$ elles ne sont pas bornées, dc on a vu des dist. sur $\mathbb{R}$ qui n'étaient pas associées à des normes.

Maintenant on va étudier en profondeur 2 familles d'exemples.

(A). Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Def Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < +\infty$. $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on note

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Quant à $p = +\infty$: $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1..n\}} |x_i|$

Proposition : $\forall p \in [1, +\infty]$, $E \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

En outre $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Rq la + importante : $p=2$, norme euclidienne, celle ac laquelle on définit la distance "physique". On rencontre aussi régulièrement $p=1$ et $p=+\infty$.

Dem . la séparation est évidente, ainsi que l'homogénéité.

. Pour l'inégalité Δ, on commence par les cas simples $p = 1, +\infty$ puis on traitera $1 < p < +\infty$ à l'aide de l'inégalité de Minkowski dans qqes instants