Correction de quelques exercices de la feuille 7
Diagonalisation

Exercice 3

1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ une valeur propre de A et $T \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé : $A.T = \lambda.T$. Notons $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ les coefficients (réels par hypothèse) de A et $(t_i)_{1\le i\le n}$ les coordonnées (complexes car $T\in M_{n,1}(\mathbb{C})$) de T.

Par définition du produit matriciel, les coordonnées du vecteur $A.T$ sont $\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}t_j\right)_{1\le i\le n}$: $AT = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}t_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}t_j \end{pmatrix}$. D'autre part, $\lambda T = \begin{pmatrix} \lambda t_1 \\ \vdots \\ \lambda t_n\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs étant égaux, on a $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}t_j = \lambda t_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}t_j = \lambda t_n \end{cases}$. En prenant les conjugués de tous ces nombres on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}t_j\right)} = \overline{\lambda t_1} \\ \vdots \\ \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}t_j\right)} = \overline{\lambda t_n} \end{cases}, \text{ ce qui donne } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{1,j}.t_j} = \overline{\lambda}.\overline{t_1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{n,j}t_j} = \overline{\lambda}.\overline{t_n} \end{cases}$$

(car le conjugué d'une somme de nbres complexes est égal à la somme de leurs conjugués, et le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués)

Mais comme les coef a_{ij} sont des nbres réels, $\overline{a_{ij}} = a_{ij}$ $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!]^2$, donc

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\overline{t_j} = \overline{\lambda}\,\overline{t_1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\overline{t_j} = \overline{\lambda}\,\overline{t_n} \end{cases}$$

ce qui signifie exactement que $A.\overline{T} = \overline{\lambda}.\overline{T}$,

donc comme T est non nul par hypothèse, $\overline{T}$ l'est aussi, donc $\overline{\lambda}$ est valeur propre de A et $\overline{T}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$!

Calculons le polynôme caractéristique de A (dont les racines donneront les valeurs propres de A)

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ -1 & 2-x & 1 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \\ 0 & 2-x & 2-x \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 1-x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_3)$$

$$= (x-2) \times (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\left(-(x-1)^2 - 1\right)$$

$$= -(x-2)\left((x-1)^2 + 1\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 + 1 > 0$ donc la seule racine réelle de χ_A est 2.

χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ (ne s'écrit pas comme produit de polynômes réels de degré 1) donc (cours, proposition 69) A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

En revanche, $\chi_A(x) = -(x-2)(x-1-i)(x-1+i)$. χ_A est donc scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

Il s'agit de trouver un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres (complexes) 2, $1+i$ et $1-i$ $(= \overline{1+i})$

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 2I_3) \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+y=0 \\ -x+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \iff x=y=z$

  Donc $\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}}(A - 2I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - (1+i)I_3) \iff \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -ix+y=0 \\ -x+(1-i)y+z=0 \\ x-iz=0 \end{cases}$

  $$\iff y = ix = -z$$

Donc $\mathrm{Ker}(A - (1+i)I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ ix \\ -ix \end{pmatrix}, x \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} \right\}$

D'après la question 1, on a alors $\mathrm{Ker}(A - (1-i)I_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix} \right\}$

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}$. Alors $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} P^{-1}$.

(P est bien inversible car ses colonnes sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes donc sont linéairement indépendants)

Exercice 7

1) Tous les vecteurs de la base canonique ont la même image par f. f n'est donc pas injective, son noyau est donc non réduit à $\{0\}$, ce qui signifie précisément que 0 est valeur propre de f.

2) $$f(v) = \underbrace{f(e_1)}_{} + f(e_2) + f(e_3) + f(e_4)$$

$$= \underbrace{(1.e_1+1.e_2+1.e_3+1.e_4)}_{\text{vue la matrice de } f \text{ dans la base canonique}} + (e_1+e_2+e_3+e_4) + \underset{(\text{même chose})}{(e_1+e_2+e_3+e_4)} + (e_1+e_2+e_3+e_4)$$

$$= 4v$$

Or $v \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ donc v est un vecteur propre associé à la valeur propre 4.

3) f est de rang 1 ($rg(f) = rg(A) = 1$ car toutes les colonnes de A sont identiques)

D'après le théorème du rang, $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^4)}_{4} = \dim(\operatorname{Ker} f) + \underbrace{rg(f)}_{1}$

donc $\dim \operatorname{Ker} f = 3$

Notons $E_0 = \operatorname{Ker} f \; (= \operatorname{Ker}(f - 0\,Id))$ et $E_4 = \operatorname{Ker}(f - 4\,Id)$

$\dim E_0 = 3$, $\dim E_4 \geqslant 1$, $E_0 \cap E_4 = \{0\}$ car ce sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc

$$\dim(E_0 + E_4) = \dim E_0 + \dim E_4 \geqslant 4 = \dim \mathbb{R}^4$$

Donc $\mathbb{R}^4 = E_0 \oplus E_4$

Tout élément non nul de E_0 est un élément du noyau, donc un vecteur propre associé à la valeur propre 0. Ainsi, toute base de E_0, à laquelle on ajoute le vecteur v (qui engendre E_4) forme une base de $\mathbb{R}^4$ constituée de vecteurs propres de f, et la matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&4 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 $\quad \chi_f(x) = (x-1)^2(x-2)^2$.

f a deux valeurs propres (1 et 2) et f est diagonalisable si et seulement si les sous espaces propres associés à ces deux valeurs propres sont de dimension 2. Notons E_1 et E_2 ces deux espaces.

$E_1 = \mathrm{Ker}(f - Id)$.

$$[f - Id]_{B_c} = A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & k & 1 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème du rang, $\dim E_1 = \dim \mathbb{R}^4 - rg(f - id)$
$= 4 - rg(A - I_4)$

donc $\underline{\dim E_1 = 2} \iff rg(A - I_4) = 2 \iff \underline{a = 0}$.

En effet, si $a = 0$ $A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & k & 1 \end{pmatrix}$ a exactement 2 lignes non nulles et linéairement indépendantes donc $rg(A - I_4) = \underline{\underline{2}}$.

Et si $a \neq 0$, le mineur d'ordre 3 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = a \neq 0$ donc $rg(A - I_4) \geqslant 3$.

$E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2Id)$

$$[f - 2Id]_{B_c} = A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ c & e & k & 0 \end{pmatrix}$$

Comme précédemment, d'après le thm du rg, $\dim E_2 = \dim \mathbb{R}^4 - rg(f - 2id)$
$= 4 - rg(A - 2I_4)$

donc $\underline{\dim E_2 = 2} \iff rg(A - 2I_4) = 2 \iff \underline{k = 0}$.

En effet, si $k = 0$, $A - 2I_4$ a exactement 2 colonnes non nulles et linéairement indépendantes donc $rg(A - 2I_4) = 2$

Et si $k \neq 0$, le mineur d'ordre 3 $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ c & e & k \end{vmatrix} = k \neq 0$ donc $rg(A - 2I_4) \geqslant 3$.

Conclusion

f est diagonalisable $\iff$ E_1 et E_2 sont de dimension 2 $\iff$ $\underline{a = k = 0}$

Exercice 10

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+1} + 2u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n$

en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrons par récurrence que la propriété (P_n) : $X_n = A^n X_0$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $X_0 = I_2 \cdot X_0 = A^0 \cdot X_0$, ce qui prouve (P_0).

Hérédité : Supposons que (P_n) est vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$, ie que $X_n = A^n X_0$

Alors $X_{n+1} \underset{\text{d'après 1.}}{\overset{\uparrow}{=}} AX_n = A.(A^n.X_0) = (A.A^n).X_0 = A^{n+1}.X_0$, ce

qui prouve (P_{n+1}) et conclut la récurrence.

On a donc bien $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = -x(1-x) - 2 = x^2 - x - 2$
$= (x+1)(x-2)$

Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

Recherchons une base de vecteurs propres de A :

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A + I_3) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0$

Donc $\ker(A + I_3) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I_3) \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2x + y = 0$

Donc $\ker(A - 2I_3) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ constitue donc une base de $\mathbb{R}^2$, formée de vecteurs propres de A,

et, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$, d'où

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Calculons P^{-1} : $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

et $\quad A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.(-1)^n & (-1)^{n+1} \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2.(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ 2.(-1)^{n+1} + 2^{n+1} & (-1)^{\cancel{n+2}} + 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

4) $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \, X_0 = A^n . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2.(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ 2.(-1)^{n+1} + 2^{n+1} & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{u_n = \frac{1}{3}\left[\left(2.(-1)^n + 2^n\right)a + \left((-1)^{n+1} + 2^n\right)b\right]}$.

Ceci est une méthode très classique pour calculer les termes d'une suite définie par une récurrence double. (ie que un terme de la suite s'exprime en fonction des deux précédents).