# Chap. 5 : Compacité

On a vu qu'en dim finie, fermé + borné $\Leftrightarrow$ compact, et notamment que la boule unité fermée d'un evn df était compacte. Dans le 1er §, on va voir la réciproque (thm de Riesz) : Si la boule unité d'un evn est compacte alors l'espace est de dim finie. Pour les espaces de dim $\infty$, notamment les espaces de fonctions, il s'agit de trouver des critères pour assurer qu'une famille est compacte (pour pouvoir en extraire une suite convergente, base de nombreux thm d'existence !) C'est l'objet du thm d'Ascoli, du §2. Enfin, toujours dans $C^0(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{métrique compact}}}{K}, \mathbb{R})$, on va s'intéresser à l'existence de parties denses, avec le thm de Stone-Weierstrass, §3

## §1. Théorème de Riesz

On commence par un résultat préliminaire

**Thm** Dans un EVN quelconque, les prop suivantes sont équivalentes

(i) La sphère unité est compacte.
(ii) La boule unité fermée est compacte.
(iii) Toute boule fermée est compacte
(iv) tout fermé borné est compact.

**Preuve** (i) $\Rightarrow$ (ii) (le + délicat) Soit $(x_n)$ une suite de $\overline{B}_E(0,1)$. S'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ identiquement nulle, alors cette sous-suite est cv. Sinon, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $x_n \neq 0$. On pose alors $\forall n \geq N$ $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$. $(y_n)_n \in S_E^{\mathbb{N}}$ avec $S_E$ compact donc elle admet une sous-suite cv $(y_{\varphi(n)})$. En outre, $(\|x_{\varphi(n)}\|)$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une sous suite $(\|x_{\varphi(\psi(n))}\|)$ convergente. Alors si $l$ désigne la 1ère limite et $\lambda$ la seconde, on montre (exercice) que $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ cv vers $\lambda l$ (et $\lambda l \in \overline{B}_E$ fermé). Dc toute suite de $\overline{B}_E$ admet une sous-suite cv (et $\overline{B}_E$ est métrique) donc $\overline{B}_E$ est compact.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Par homothétie et translation, toutes les boules fermées (de rayon $\neq 0$) d'un evn sont homéomorphes, donc si l'une est compacte, toutes le sont. Et le singleton est évidemment compact.

(iii) ⇒ (iv) H fermé borné est fermé dans une boule fermée, qui est compacte par (iii) donc compact.

(iv) ⇒ (i) immédiat.

□

**Théorème (Riesz)** Un EVN est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

**Preuve** dim finie ⇒ $\overline{B}_E(0,1)$ compacte déjà vu

⇐ On suppose $\overline{B}_E(0,1)$ compacte. Alors (précompacité), on peut recouvrir $\overline{B}_E$ par une union finie de boules de rayon 1/2 : $\overline{B}_E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_E(x_i, \frac{1}{2})$. Montrons que $E = \mathrm{vect}(\{x_i\})$.

Pour tout $x \in \overline{B}_E$, $\exists\, i \in \{1, \dots, m\}$ et $y \in B_E(0,1)$ tq $x = x_i + \frac{1}{2} y$. Par récurrence, on en déduit l'existence d'une suite $i_k \in \{1..m\}^{\mathbb{N}}$ tq $\forall k$,

$$\left\| x - \left(x_{i_0} + \frac{1}{2} x_{i_1} + \dots + \frac{1}{2^k} x_{i_k}\right) \right\| \leq \frac{1}{2^k}$$

En regroupant les indice k ayant la même valeur de $i_k$ on obtient

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{m} \lambda_{k,i}\, x_i \right\| \leq \frac{1}{2^k}$$

où chaque suite $(\lambda_{k,i})$ satisfait $|\lambda_{k,i} - \lambda_{k-1,i}| \leq \frac{1}{2^k}$, donc converge (exercice) vers un certain $\lambda_i$, et on obtient $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, d'où $x \in \mathrm{vect}\{x_i\}$. □

**Exercice** Retrouvez dans vos notes des exemples de suites bornées sans sous-suites convergentes en dimension ∞.

## § 2. Théorème d'Ascoli

A quelle condition une partie de $(C^0([a,b],\mathbb{R}), \| \|_\infty)$ est elle compacte ? (*)
A quelle condition une suite de fonctions $(f_n)_n \in C^0([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ admet-elle une suite convergeant pour $\| \|_\infty$ ? C'est l'objet de ce paragraphe, qui s'applique plus généralement à $(C^0(X,Y), d_\infty)$ où $(X,d)$ est un espace métrique compact, $(Y,\delta)$ un espace métrique, et $d_\infty$ la distance uniforme définie sur $C^0(X,Y)$ par

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} \delta(f(x),g(x))$$

La condition (*) est celle d'équicontinuité uniforme :

cf "à dire avant"

**Déf** Soient $(X,d)$ et $(Y,\delta)$ des e.m (X n'est pas supposé compact ici). Une famille d'applications $\mathcal{F} \subset C^0(X,Y)$ est dite uniformément équicontinue si :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall (x,y)\in X^2,\ d(x,y)<\delta \Rightarrow \forall f\in\mathcal{F}\ \ \delta(f(x),f(y))<\varepsilon$$

**Rq** On pourrait aussi dire "équi-(uniformément continue)". Dans l'uniforme continuité pour une fonction, on a un $\delta$ qui ne dépend que de $\varepsilon$, pas de $x$. Dans "l'équi-uniformité", on a un $\delta$ qui ne dépend ni de $x$, ni de la fct $f\in\mathcal{F}$. C'est "doublement uniforme".

**Rq 2** On aurait dû définir avant l'équi continuité en un pt $x_0$
exercice : quelle peut être cette def ?
Mais ds le cas qui nous occupera maintenant (X compact), une famille est UEC ssi elle est EC en tout point (exercice*) (généralisation du thm de Heine)

**Exemple clef** Une famille équilipschitz (ie lipschitz avec une constante commune) est UEC.

**Exo** donner un ex de famille fermée bornée non UEC (c'est une question facile, la réponse se trouve pas loin)

**Thm d'Ascoli** Soient $(E,d)$ et $(F,\delta)$ des e.m compacts et $\mathcal{F}\subset \mathcal{C}(X,Y)$
$\mathcal{F}$ est compacte dans $(C^0(X,Y), d_\infty)$ ssi $\mathcal{F}$ est fermée et équicontinue (donc UEC).

On a aussi un énoncé dans le cas où $(Y,\delta)$ n'est pas compact, mais un peu moins synthétique. On va tout de même le donner pour un cas spécifique (mais déjà très utile!) d'espace pas compact : $\mathbb{R}^n$ (en particulier $\mathbb{R}$)

**Corollaire** Si $(X,d)$ est compact, $F \subset C^0(X,\mathbb{R}^n)$ est compacte si et seulement si elle est fermée, bornée et équicontinue.

**Preuve du corollaire** Si $F$ est bornée, ses fonctions sont à valeur dans une boule fermée $Y$ de $\mathbb{R}^n$, donc dans un ens compact et on est ramené aux hypothèses d'Ascoli. donc : • équicontinue fermé borné $\Rightarrow$ compact

et • compact $\underset{\text{général}}{\Rightarrow}$ fermé + borné $\hookrightarrow$ + UEC.

Ascoli (réciproque)

**Corollaire** : Soit $(f_n)$ une suite de fonctions dans $C^0([a,b],\mathbb{R})$ uniformément bornées ($\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f_n\|_\infty \leq M$). Si $\{f_n\}$ est équicontinue, alors elle admet une sous-suite convergeant uniformément.

A dire avant

Rq Ce qui fait qu'une suite de fonctions continues uniformément bornées (ex : $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$, $x \mapsto \sin(nx)$) n'admette pas de sous-suite uniformément cv provient du fait que ces fct° sont "de moins en moins continues" (oscillent de + en +, ont une pente de + en + grande). L'équicontinuité empêche ça).

Le thm d'Ascoli a de nombreuses applications, notamment pour montrer l'existence de solutions d'équa diff. Vous en verrez d'autres en analyse fonctionnelle.

Passons maintenant à la ...

**Preuve du thm d'Ascoli**

1) sens "facile" Supposons $\tilde{F}$ compacte. Alors elle est fermée (général). Elle est en outre précompacte : $\forall \varepsilon>0$, $\exists f_1,\dots,f_n \in C(X,Y)$ tq $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{d_\infty}(f_i, \varepsilon/3)$

ie $\forall f \in F$, $\exists i \in \{1..n\}$ tq $d_\infty(f,f_i) \leq \varepsilon/3$. Une famille finie d'appli $C^0$ sur un compact est automatiquement uniformément équicontinue donc $\exists \delta>0$ tq $\forall i \in \{1..n\}$, $\forall x,y \in X$, $d(x,y)<\delta \Rightarrow d(f_i(x),f_i(y)) < \varepsilon/4$

On a alors rapidement par inégalité triangulaire $\forall x,y \in X$, $d(x,y)<\delta \Rightarrow \forall f \in F$ $d(f(x),f(y))<\varepsilon$ ie $\tilde{F}$ UEC

2) sens difficile. Supposons $\mathcal{F}$ fermée et UEC. Déjà, $\mathcal{F}$ fermée dans $C^0(X,Y)$ qui est complet, donc $\mathcal{F}$ complet. Reste à montrer la précompacité :
(métrique compact donc complet)

Soit $\varepsilon>0$. On veut construire une famille finie $\{g_i\}_{i\in I} \subset C^0(X,Y)$ tq $\forall f\in\mathcal{F},\ \exists i\in I$ tq $d(f,g_i)<\varepsilon$.

idée pour construire cette famille finie : "discrétiser" le pb. l'UEC dit que on peut trouver un $\eta>0$ tq toutes les fct° de la famille varient d'au + ($\varepsilon/4$) sur chaque boule de X de rayon $\eta$. Toutes les fonctions sont alors déterminé à $\varepsilon/4$ près par leurs valeurs aux centres d'une collection de boules de rayon $\eta$ recouvrant X. Mais comme X est compact, un nb fini de telles boules le recouvre, et comme Y est compact, les fct° ne peuvent prendre qu'un nb fini de valeurs à $\varepsilon/4$ près... Formalisons tout ça :

$\exists\eta>0$ tq $\forall (x,y)\in X^2,\ d(x,y)<\eta \Rightarrow \forall f\in\mathcal{F},\ \delta(f(x),f(y))<\varepsilon/4$

X et Y sont compacts donc précompacts, donc $\exists\ X'=\{x_1 - x_p\}\subset X$ et $Y'=\{y_1 - y_q\}\subset Y$ tq $X=\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i,\eta)$ et $Y=\bigcup_{j=1}^{q} B(y_j,\varepsilon/4)$

On considère $H=(Y')^{X'}=\{h : X'\to Y'\}$ (fonctions "discrétisées")
C'est un ensemble fini.

$\forall h\in H$, on note $\mathcal{F}_h=\{f\in\mathcal{F}\ /\ \forall i,\ \delta(f(x_i),h(x_i))<\varepsilon/4\}$ (qui est éventuellement vide). Si $\mathcal{F}_h\neq\emptyset$, on choisit $f_h\in\mathcal{F}_h$ ("représentant" dans $\mathcal{F}$ de la "fonction discrétisée" $h$).

Alors on peut vérifier que $\mathcal{F}\subset \underbrace{\bigcup_{\substack{h\in H\\ \text{tq } \mathcal{F}_h\neq\emptyset}}}_{\text{fini}} B_{d_\infty}(f_h,\varepsilon)$, ce qui donne la précompacité.

En effet, soit $f\in\mathcal{F}$. Pour tout $x\in X'$, $\exists\ h(x)\in Y'$ tq $\delta(f(x),h(x))<\varepsilon/4$
On obtient ainsi $h : X'\to Y'$ et on a $f\in\mathcal{F}_h$ par construct° de $\mathcal{F}_h\neq\emptyset$
Le $f_h$ correspondant satisfait alors :

$$\forall x\in X',\ \delta(f(x),f_h(x))\leq\delta(f(x),h(x))+\delta(h(x),f_h(x))\leq\varepsilon/2$$

Mais alors $\forall x\in \underline{X}$, il existe $x'\in X'$ tq $d(x,x')<\eta$, de sorte que

$$\delta(f(x),f_h(x))\leq\underbrace{\delta(f(x),f(x'))}_{\substack{<\varepsilon/4\\ \text{car } \eta \text{ module d'UEC}}}+\underbrace{\delta(f(x'),f_h(x'))}_{<\varepsilon/2}+\underbrace{\delta(f_h(x'),f_h(x))}_{\substack{<\varepsilon/4\\ \text{car } \eta \text{ module d'UEC}}}$$

et finalement $f\in B_{d_\infty}(f_h,\varepsilon)$, ce qui conclut la preuve de la précompacité.

# § 3. Théorème de Stone-Weierstrass

Un thm classique de Weierstrass montre que les fonctions polynomiales sont denses dans l'espace des fct° continues sur un segment muni de $\| \|_\infty$ :

**Théorème de Weierstrass** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $P_\varepsilon$ telle que $\sup_{[a,b]} |f - P_\varepsilon| \leq \varepsilon$

**Remarques** (i) le résultat est grossièrement faux sur un intervalle non borné ! On peut montrer que si $f$ est $C^0$ sur $\mathbb{R}$ et si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$ alors $f$ est elle-même polynomiale !

Sur un intervalle ouvert $]a,b[$, le résultat reste vrai si on suppose $f$ UC°, mais dans ce cas $f$ se prolonge $C^0$ à $[a,b]$ donc on est en fait ramené aux hyp. de Weierstrass !

ii) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n'est pas un polynôme et si $(P_n) \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ satisfait $\|f - P_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ alors $\deg(P_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ (exercice).

---

Il suffit de considérer le cas où $[a,b] = [0,1]$. On a alors une remarquable preuve constructive due à Bernstein (1912) :

**Proposition** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $C^0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) \quad \text{où} \quad B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

("polynôme de Bernstein")

Alors $\sup_{[0,1]} |f - P_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On ne va pas donner ici la preuve de ce thm (mais je vous encourage à la chercher). À la place, on va énoncer un thm + général pour trouver des familles "denses" plus généralement dans $C^0(E, \mathbb{R})$ avec $(E,d)$ espace métrique compact. (On rappelle qu'alors $C(E, \mathbb{R})$ est muni de la norme uniforme qui en fait un espace de Banach)

**Déf / Rappel** • Une partie $\mathcal{A} \subset C^0(E,\mathbb{R})$ (espace vectoriel) est une (sous-)algèbre si $\forall f,g \in \mathcal{A}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f+g \in \mathcal{A}$, $\lambda f \in \mathcal{A}$, et $fg \in \mathcal{A}$

- On dit que $\mathcal{A}$ contient les constantes si la fonction constante égale à 1 (et donc ttes les autres) est dans $\mathcal{A}$.
- Enfin on dit que $\mathcal{A}$ sépare les points de $E$ si $\forall (x,y) \in E$ tq $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{A}$ tq $f(x) \neq f(y)$.

Exemples (i) $C(E,\mathbb{R})$ tt entier est une algèbre qui contient les constantes et sépare les pts (les 1ère et 3e propriétés ont été prouvées au fil du cours. Saurez-vous retrouver où ? et bien sûr démontrer la 2e !)

(ii) Les fonctions polynomiales dans $C([a,b],\mathbb{R})$ sont un autre exemple, celui qui nous intéresse pour le thm de Weierstrass.

(iii) On montre facilement que si $\mathcal{A} \subset C(E,\mathbb{R})$ est une algèbre, son adhérence $\bar{\mathcal{A}}$ aussi.

**Théorème de Stone-Weierstrass** ($(E,d)$ désigne tj un em compact et $C(E,\mathbb{R})$ est muni de $\|\ \|_\infty$)

Si $\mathcal{A} \subset C(E,\mathbb{R})$ est une algèbre qui contient les constantes et sépare les points, alors $\mathcal{A}$ est dense dans $C(E,\mathbb{R})$.

Le thm de Weierstrass tout court est donc un cas particulier de cet énoncé.

**Preuve.** En voici les étapes préliminaires. On montre d'abord (1) que dans $C([0,1],\mathbb{R})$, $\sqrt{\ }$ est limite de fonctions polynomiales. On se sert de cela pour montrer (2) qu'une algèbre $\mathcal{A} \subset C(E,\mathbb{R})$ est stable par passage à la valeur absolue, puis par conséquent par passage au min et au max. On montre ensuite (3) que si $\mathcal{A}$ contient les constantes et sépare les pts, on peut trouver ds $\mathcal{A}$ une fct° prenant en 2 pts arbitraires des valeurs arbitraires. Après ces étapes préparatoires, on passe à la preuve proprement dite.

**Etape 1** "classique" (approximat° polynomiale de la racine carrée d'un nb $>0$ par une suite récursive)

On définit par réc. des fct° polynomiales sur $[0,1]$ en posant $P_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\quad P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{t - P_n(t)^2}{2} = f(P_n(t))$$

On vérifie que $\sqrt{t} - P_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - P_n(t))\left(1 - \frac{\sqrt{t} + P_n(t)}{2}\right)$ et on en déduit par récurrence que $P_n(t) \leq \sqrt{t}$ et $P_{n+1}(t) \geq P_n(t)$. Donc $(P_n(t))_n$ CV vers un pt fixe positif de $f$, donc vers $\sqrt{t}$. Autrement dit $(P_n)_n$ CVS vers $\sqrt{\ }$ sur $[0,1]$. On montre la CVU grâce au thm de Dini