§3. Théorèmes généraux sur les espaces métriques complets

(A) Extension des applications uniformément continues

Thm Soit (E,d) un e.m, $A\subset E$ une partie dense, (F,δ) un espace métrique complet.
Soit $f:(A,d_A)\to(F,\delta)$ une application uniformément continue.
Alors il existe une unique application uniformément C^0 $\tilde{f}:(E,d)\to(F,\delta)$ tq $\tilde{f}|_A = f$.

Preuve : l'unicité si existence découle d'un résultat déjà vu lors de la définition de "partie dense" (chap.3) et est indépendante de la complétude et de la continuité uniforme (et valable pour des esp. topo. non métrisables).
Pour démontrer l'existence, on a besoin d'un énoncé général intermédiaire :

Proposition (caractérisation séquentielle de l'UC^{té}) Soit $f:(E,d)\to(F,\delta)$ e.m.

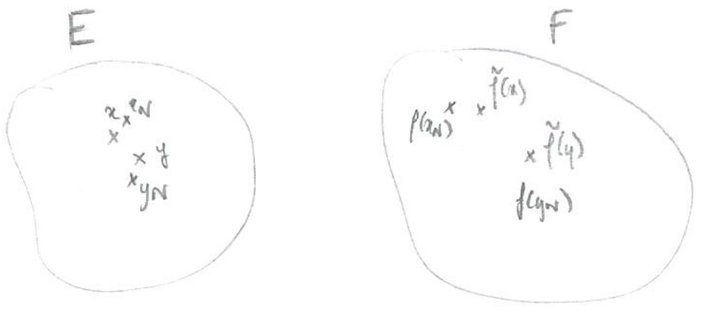
i) f est UC° ssi $\forall (x_n),(y_n)\in E^{\mathbb{N}}$ tq $d(x_n,y_n)\to 0$, $\delta(f(x_n),f(y_n))\to 0$.

ii) Si f est UC° et $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, $(f(x_n))\in F^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

La preuve est laissée en exercice (fondamental).

Existence. On n'a pas tellement le choix pour la construction de $\tilde{f}$:
Soit $x\in E$. Par densité de A ds E, $\exists (x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n\to x$.
(x_n) converge donc est de Cauchy. f est UC° donc $(f(x_n))$ est de Cauchy (ii),
donc elle converge puisque (F,δ) est complet. On veut que $\tilde{f}$ soit continue sur E donc on pose $\tilde{f}(x)=\lim_n f(x_n)$. Cela ne dépend pas de la suite (x_n) tendant vers x choisie grâce au (i) ci-dessus.

Il s'agit maintenant de prouver que $\tilde{f}$ est UC°. Soit $\varepsilon>0$.
Par UC^{té} de f sur A $\exists \eta>0$ tq $\forall x,y\in A$, $d(x,y)<\eta \Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon/3$.
Soient maintenant $x,y\in E$ tq $d(x,y)<\eta/3$. Si $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ cv vers x,



par construct° de $\tilde{f}$, $(f(x_n))$ cv vers $\tilde{f}(x)$.
Il existe donc $N\in\mathbb{N}$ tq $d(x_N,x)<\eta/3$ et $\delta(f(x_N),\tilde{f}(x))<\varepsilon/3$, et même chose pour y.

On a alors $\delta(\tilde{f}(x),\tilde{f}(y)) \leq \underbrace{\delta(\tilde{f}(x), f(x_N))}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{\delta(f(x_{N'}), f(y_{N'}))}_{(*)} + \underbrace{\delta(f(y_{N'}), \tilde{f}(y))}_{<\varepsilon/3}$

or $d(x_N, y_N) \leq \underbrace{d(x_N, x)}_{\leq \eta/3} + \underbrace{d(x,y)}_{\leq \eta/3} + \underbrace{d(y, y_{N'})}_{\leq \eta/3} < \eta$ donc $(*) < \varepsilon/3$

donc ds E, $d(x,y) < \eta/3 \Rightarrow \delta(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) < \varepsilon$, ce qui conclut. □

Exercice Si f est k-lip (donc UC^0), $\tilde{f}$ aussi.

Corollaire : Si F est un Banach et A un sev de E, toute $f \in \mathcal{L}_c(A,F)$ se prolonge de façon unique en $\tilde{f} \in \mathcal{L}_c(\overline{A}, F)$.

Application Définition de l'intégrale de Riemann

Soit F un evn. On définit comme dans $\mathbb{R}$ les fonctions en escalier de $[a,b] \to F$, dont on note $\mathcal{E}([a,b],F)$ l'espace. Si $f \in \mathcal{E}$ et si $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$ tq $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est constante on dit que cette subd est admissible pour f.

Lemme $\mathcal{E}([a,b],F)$ est un sev de $\mathcal{B}([a,b],F)$.

On définit pour $f \in \mathcal{E}$ l'intégrale $I(f) = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(c_i) \in F$, pour une subdivision admissible qcq (l'invariance % à la subd se montre en vérifiant que si σ et σ' sont admissibles $I_\sigma(f) = I_{\sigma \cup \sigma'}(f) = I_{\sigma'}(f)$,) (on laisse au lecteur le soin de donner un sens à cette notation)

Prop l'application $I : \mathcal{E}([a,b],F) \to F$ est linéaire et lipsch de cte $b-a$.

Déf On appelle fonctions réglées de $[a,b]$ ds F les fct° $\in \overline{\mathcal{E}([a,b],F)} \subset \mathcal{B}([a,b],F)$

Exercice Une fonction continue est réglée.

I s'étend donc de façon unique en une appli linéaire continue $\tilde{I}$ de $\overline{\mathcal{E}}([a,b],F)$ dans F

↳ $\tilde{I}$ est l'intégrale de Riemann.

(B) Théorème du point fixe

Def Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. Pour tout $x \in E$, on appelle orbite de x par f la suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

On dit qu'un point a est un point fixe de f si $f(a) = a$

Lemme. Soit (E,d) un e.m et f une appli continue de E dans E. Soit $x \in E$ et (x_n) son orbite par f. Si (x_n) converge dans E, sa limite est un point fixe de f.

Preuve Notons a la limite de (x_n). Alors (x_{n+1}) cv aussi vers a. Mais $x_{n+1} = f(x_n)$ et par continuité, $f(x_n) \longrightarrow f(a)$. Par unicité de la limite (dans un e.m), $f(a) = a$. □

Définition Une application $f : (E,d) \to (E,d)$ est contractante s'il existe $0 \leq k < 1$ tq $\forall (x,y) \in E^2,\ d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$.
(Autrement dit f est k-lipschitzienne pour un $k < 1$)

Théorème (du Point fixe de Banach-Picard) Soit (E,d) un e.m complet et $f : E \to E$ une appli contractante de constante $k \in [0,1[$. Alors f possède un unique point fixe a, et toutes les orbites de points de E par f convergent vers a exponentiellement vite : si (x_n) est l'orbite de $x \in E$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, a) \leq k^n d(x, a).$$

Preuve • L'orbite de tt pt $x \in E$ est de Cauchy : Soit (x_n) l'orbite de x.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq k\, d(x_{n+1}, x_n), \text{ d'où}$$

par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$

Mais alors $\forall p \geq q \geq n$, $d(x_q, x_p) \leq d(x_p, x_{p-1}) + \dots + d(x_{q+1}, x_q)$

$$\leq (k^{p-1} + \dots + k^q)\, d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

(série géom)

Donc (x_n) est de Cauchy, dans (E,d) complet, donc elle converge vers $a \in E$, qui d'après le lemme est un point fixe de f, d'où l'existence

• Si b est un pt fixe de f, on a $d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq k\, d(a,b)$ ac $k < 1$ donc $d(a,b) = 0$ (ie $a = b$)

d'où l'unicité.

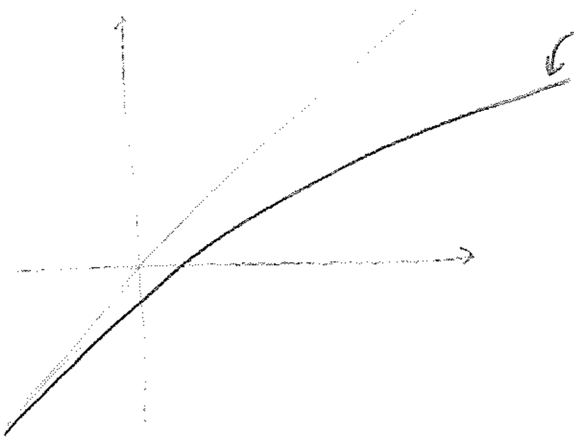
- Enfin, étant donné $y \in E$ et (y_n) son orbite par f, on a immédiatement par récurrence que $d(y_n, a) \leq k^n d(y, a)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Les applications sont nombreuses ! Notamment le thm d'inversion locale en calcul diff, le thm de Cauchy-Lipschitz en équa diff...
Il existe d'autres thm de point fixe sans hypothèse de contract° mais basés sur la topologie de l'espace E concerné (ex : Brouwer)

Rq les hypothèses sont nécessaires

1) $(E,d) = (]0,+\infty[, |\ |)$, $f : x \mapsto \frac{x}{2}$. L'appli est bien contractante mais n'a pas de pt fixe dans E. Le pb est qu'ici E n'est pas complet (car pas fermé dans $(\mathbb{R}, |\ |)$ complet)

2) Une f satisfaisant $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ $\forall x,y \in E$ n'est pas nécessairement contractante.



n'importe quelle fct° C^1 dt la dérivée $\in]0,1[$ et tend vers 1 qd part sans l'atteindre

↳ on voit bien sur le dessin que ça n'a pas de pt fixe (intersect° du graphe de la 1ère bissectrice)

© Théorème de Baire

Théorème de Baire : Dans un espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

De façon équivalente, toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

- Ne pas oublier "ouverts" : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $(\mathbb{R}, |.|)$ mais d'intersect° vide.
- 2 ouverts denses s'intersectent toujours en un ouvert dense. La complétude permet de passer à une intersection d'une infinité de tels ouverts et de dire que l'$\cap$ n'est pas vide, et même dense. Par contre elle n'est en général plus ouverte !

Preuve Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses, V leur intersection et W un ouvert de E. Il s'agit de mq $V\cap W \neq \emptyset$. On va procéder par induction et utiliser le lemme vu il y a un moment sur les e.m complets :
"toute suite $\searrow$ de fermés non vides dt le diam tend vers 0 tend vers un singleton."
dans un espace complet bien sûr !

- Comme V_0 est dense, $V_0\cap W \neq \emptyset$. Il existe donc $x_0 \in E$ et $0<r_0<1$ tq $\overline{B_0} := \overline{B}(x_0, r_0) \subset W\cap V_0$.
- Comme V_1 est dense, $V_1 \cap B_0 \neq \emptyset$. Il existe donc $x_1 \in E$ et $0<r_1<\frac{1}{2}$ tq $\overline{B_1} = \overline{B}(x_1, r_1) \subset V_1 \cap B_0$.

⋮

$\forall n \geq 1$, $V_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$, il existe donc $x_n \in E$ et $0<r_n<\frac{1}{2^n}$ tq
$\overline{B_n} = \overline{B}(x_n, r_n) \subset V_n \cap B_{n-1}$

Par le lemme qu'on vient de rappeler, $\exists x \in E$ tq $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, r_n) = \{x\}$,
et par construction, $x \in V\cap W$! □

Vocabulaire Une intersection dénombrable d'ouverts denses est appelé un G_δ-dense. Une propriété satisfaite sur un G_δ dense est dite générique.

ex : La propriété d'être transcendant pour un élt de $\mathbb{R}$ est générique.
On dit " un nb réel est génériquement transcendant "

↑ pas algébrique.
(pas racine d'un polynôme à coeff dans $\mathbb{Z}$)

Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est génériquement différentiable en aucun point.

Une autre application remarquable évoquée au moment des Hilbert :

Proposition Soit $(E, \| \|)$ un Banach. Si $\dim E = \infty$, E ne possède pas de base (algébrique) dénombrable.

(Rappel Si E est un $\mathbb{R}$ev, on dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est une base (algébrique) de E si tout $x \in E$ peut s'écrire de façon unique comme une combinaison linéaire finie d'éléments de cette famille :

- $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $i_1, \dots, i_n \in I$ tq $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_{i_j}$
  et cette écriture est unique

ou
- $\exists ! (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ tq $\lambda_i = 0$ sauf pour un nb fini de i et
  $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ (qui a bien un sens vu l'hyp ci-dessus)

En d'autres termes, la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre (aucun de ses élts n'est une combi finie des autres) et engendre E (E coïncide ac l'ens des combi linéaires finies d'élts de $(e_i)_{i\in I}$))

Preuve de la proposition Si $\dim E = \infty$, on peut construire par récurrence une famille libre $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de E. Montrons que le sev V engendré par une telle famille ne peut coïncider ac E.

On a $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ où $V_n = \langle e_0, \dots, e_n \rangle$ (sev engendré par ...)

Or
- V_n est fermé dans E (comme tt sev de dim finie)
- V_n est d'intérieur vide : $\forall x \in V_n$ et $\forall \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ contient en particulier $y = x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{e_{n+1}}{\|e_{n+1}\|}$ qui n'appartient pas à V_n

Par le thm de Baire, V est d'intérieur vide dans E, donc $V \neq E$. $\square$