C) Théorème de Baire

<u>Théorème de Baire</u> : Dans un espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

De façon équivalente, toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

- Ne pas oublier "ouverts" : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $(\mathbb{R}, |.|)$ mais d'intersect° vide.
- 2 ouverts denses s'intersectent toujours en un ouvert dense. La complétude permet de faire à une intersection d'une infinité de tels ouverts et de dire que l' $\cap$ n'est pas vide, et même dense. Par contre elle n'est en général plus ouverte !

<u>Preuve</u> Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses, V leur intersection et W un ouvert de E. Il s'agit de mq $V\cap W \neq \emptyset$. On va procéder par induction et utiliser le lemme vu il y a un moment sur les e.m complets : "toute suite $\searrow$ de fermés non vides dt le diam tend vers 0 tend vers un singleton." dans un espace complet bien sûr !

- Comme V_0 est dense, $V_0\cap W\neq\emptyset$. Il existe donc $x_0\in E$ et $0<r_0<1$ tq $\overline{B_0}:=\overline{B}(x_0,r_0) \subset W\cap V_0$.
- Comme V_1 est dense, $V_1\cap B_0 \neq \emptyset$. Il existe donc $x_1\in E$ et $0<r_1<\frac{1}{2}$ tq $\overline{B_1}=\overline{B}(x_1,r_1)\subset V_1\cap B_0$.

⋮

$\forall n\geq 1$, $V_n\cap B_{n-1}\neq\emptyset$, il existe donc $x_n\in E$ et $0<r_n<\frac{1}{2^n}$ tq

$\overline{B_n}=\overline{B}(x_n,r_n)\subset V_n\cap B_{n-1}$

Par le lemme qu'on vient de rappeler, $\exists x\in E$ tq $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{B}(x_n,r_n)=\{x\}$, et par construction, $x\in V\cap W$! □

<u>Vocabulaire</u> Une intersection dénombrable d'ouverts denses est appelé un G_δ dense. Une propriété satisfaite sur un G_δ dense est dite <u>générique</u>

<u>ex</u> : La propriété d'être transcendant pour un élt de $\mathbb{R}$ est générique. On dit " un nb réel est génériquement transcendant "

pas algébrique.
(pas racine d'un polynôme à coeff dans $\mathbb{Z}$)

Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est génériquement différentiable en aucun point.

Une autre application remarquable évoquée au moment des Hilbert :

Proposition Soit $(E, \| \|)$ un Banach. Si $\dim E = \infty$, E ne possède pas de base (algébrique) dénombrable.

(**Rappel** Si E est un $\mathbb{R}$ev, on dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une base (algébrique) de E si tout $x \in E$ peut s'écrire de façon unique comme une combinaison linéaire finie d'éléments de cette famille :

- $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $i_1, \dots, i_m \in I$ tq $x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_i e_{i_j}$

  et cette écriture est unique

ou
- $\exists! (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ tq $\lambda_i = 0$ sauf pour un nb fini de i et

  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ (qui a bien un sens sous l'hyp ci-dessus)

En d'autres termes, la famille $(e_i)_{i \in I}$ est libre (aucun de ses élts n'est une combi finie des autres) et engendre E (E coïncide ac l'ens. des combi linéaires finies d'élts de $(e_i)_{i \in I}$))

Preuve de la proposition Si $\dim E = \infty$, on peut construire par récurrence une famille libre $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de E. Montrons que le sev V engendré par une telle famille ne peut coïncider ac E.

On a $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ où $V_n = \langle e_0, \dots, e_n \rangle$ (sev engendré par ...)

Or
- V_n est fermé dans E (comme tt sev de dim finie)
- V_n est d'intérieur vide : $\forall x \in V_n$ et $\forall \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ contient en particulier $y = x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{e_{n+1}}{\|e_{n+1}\|}$ qui n'appartient pas à V_n

Par le thm de Baire, V est d'intérieur vide dans E, donc $V \neq E$. □