§3. Théorèmes généraux sur les espaces métriques complets

(A) Extension des applications uniformément continues

Thm Soit (E,d) un e.m, $A \subset E$ une partie dense, (F,δ) un espace métrique complet.
Soit $f : (A, d_A) \to (F,\delta)$ une application uniformément continue.
Alors il existe une unique application uniformément C^0 $\tilde{f} : (E,d) \to (F,\delta)$ tq $\tilde{f}|_A = f$.

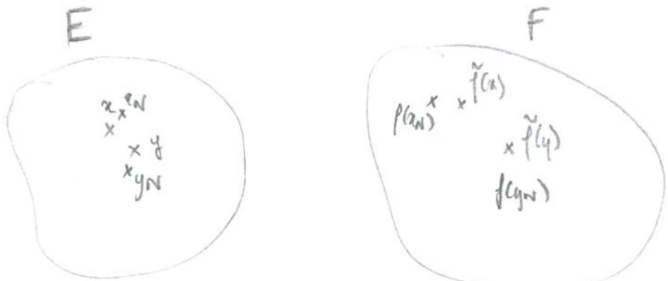
Preuve : L'unicité si existence découle d'un résultat déjà vu lors de la définition de "partie dense" (chap.3) et est indépendante de la complétude et de la continuité uniforme (et valable pour des esp. topo. non métrisables).
Pour démontrer l'existence, on a besoin d'un énoncé général intermédiaire.

Proposition (caractérisation séquentielle de l'UC^{té}) Soit $f : (E,d) \to (F,\delta)$ e.m.
i) f est UC^0 ssi $\forall (x_n),(y_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tq $d(x_n,y_n) \to 0$, $\delta(f(x_n),f(y_n)) \to 0$.
ii) Si f est UC^0 et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, $(f(x_n)) \in F^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

La preuve est laissée en exercice (fondamental).

Existence. On n'a pas tellement le choix pour la construction de $\tilde{f}$: Soit $x \in E$. Par densité de A ds E, $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to x$. (x_n) converge donc est de Cauchy. f est UC^0 donc $(f(x_n))$ est de Cauchy (ii), donc elle converge puisque (F,δ) est complet. On veut que $\tilde{f}$ soit continue sur E donc on pose $\tilde{f}(x) = \lim_n f(x_n)$. Cela ne dépend pas de la suite (x_n) tendant vers x choisie grâce au (i) ci-dessus.

Il s'agit maintenant de prouver que $\tilde{f}$ est UC^0. Soit $\varepsilon > 0$.
Par UC^{té} de f sur A $\exists \eta > 0$ tq $\forall x,y \in A$, $d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x),f(y)) < \varepsilon/3$.
Soient maintenant $x,y \in E$ tq $d(x,y) < \eta/3$. Si $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ cv vers x,



par construct° de $\tilde{f}$, $(f(x_n))$ cv vers $\tilde{f}(x)$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tq $d(x_N,x) < \eta/3$ et $\delta(f(x_N),\tilde{f}(x)) < \varepsilon/3$, et même chose pour y.

On a alors $\delta(\tilde{f}(x),\tilde{f}(y)) \leq \underbrace{\delta(\tilde{f}(x), f(x_N))}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{\delta(f(x_N), f(y_{N'}))}_{(*)} + \underbrace{\delta(f(y_{N'}), \tilde{f}(y))}_{<\varepsilon/3}$

or $d(x_N, y_N) \leq \underbrace{d(x_N, x)}_{\leq \eta/3} + \underbrace{d(x,y)}_{\leq \eta/3} + \underbrace{d(y, y_{N'})}_{\leq \eta/3} < \eta$ donc $(*) < \varepsilon/3$

donc ds E, $d(x,y) < \eta/3 \Rightarrow \delta(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) < \varepsilon$, ce qui conclut. □

<u>Exercice</u> Si f est k-lip (donc UC^0), $\tilde{f}$ aussi.

<u>Corollaire</u> : Si F est un Banach et A un sev de E, toute $f \in \mathcal{L}_c(A, F)$ se prolonge de façon unique en $\tilde{f} \in \mathcal{L}_c(\bar{A}, F)$.

<u>Application</u> Définition de l'intégrale de Riemann

Soit F un EVN. On définit comme dans $\mathbb{R}$ les fonctions en escalier de $[a,b] \to F$, dont on note $\mathcal{E}([a,b],F)$ l'espace. Si $f \in \mathcal{E}$ et si $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$ tq $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est constante on dit que cette subd est <u>admissible</u> pour f.

<u>Lemme</u> $\mathcal{E}([a,b],F)$ est un sev de $\mathcal{B}([a,b],F)$.

On définit pour $f \in \mathcal{E}$ l'intégrale $I(f) = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(c_i) \in F$, ... pour une subdivision admissible qcq (l'invariance % à la subd se montre en vérifiant que si σ et σ' sont admissibles $I_\sigma(f) = I_{\sigma\cup\sigma'}(f) = I_{\sigma'}(f)$,) (on laisse au lecteur le soin de donner un sens à cette notation)

<u>Prop</u> L'application $I : \mathcal{E}([a,b],F) \to F$ est linéaire et lipsch de cte $b-a$.

<u>Déf</u> On appelle fonctions réglées de $[a,b]$ ds F les fct° $\in \overline{\mathcal{E}([a,b],F)} \subset \mathcal{B}([a,b],F)$

<u>Exercice</u> Une fonction continue est réglée.

I s'étend donc de façon unique en une appli linéaire continue $\tilde{I}$ de $\mathcal{R}([a,b],F)$ dans F

↳ $\tilde{I}$ est l'intégrale de Riemann.

B) Théorème du point fixe

Déf Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. Pour tout $x \in E$, on appelle orbite de x par f la suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

On dit qu'un point a est un point fixe de f si $f(a) = a$

Lemme. Soit (E,d) un e.m et f une appli continue de E dans E. Soit $x \in E$ et (x_n) son orbite par f. Si (x_n) converge dans E, sa limite est un point fixe de f.

Preuve Notons a la limite de (x_n). Alors (x_{n+1}) cv aussi vers a. Mais $x_{n+1} = f(x_n)$ et par continuité, $f(x_n) \longrightarrow f(a)$. Par unicité de la limite (dans un e.m), $f(a) = a$. □

Définition Une application $f : (E,d) \to (E,d)$ est contractante s'il existe $0 \leq k < 1$ tq $\forall (x,y) \in E^2$, $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$.
(Autrement dit f est k-lipschitzienne pour un $k < 1$)

Théorème (du Point fixe de Banach-Picard) Soit (E,d) un e.m complet et $f : E \to E$ une appli contractante de constante $k \in [0,1[$. Alors f possède un unique point fixe a, et toutes les orbites de points de E par f convergent vers a exponentiellement vite : si (x_n) est l'orbite de $x \in E$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, a) \leq k^n d(x, a).$$

Preuve • L'orbite de tt pt $x \in E$ est de Cauchy : Soit (x_n) l'orbite de x.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq k\, d(x_{n+1}, x_n)$, d'où par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$

Mais alors $\forall p > q \geq n$, $d(x_q, x_p) \leq d(x_p, x_{p-1}) + \dots + d(x_{q+1}, x_q)$

$$\leq (k^{p-1} + \dots + k^q)\, d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

(série géom)

Donc (x_n) est de Cauchy, dans (E,d) complet, donc elle converge vers $a \in E$, qui d'après le lemme est un point fixe de f, d'où l'existence

• Si b est un pt fixe de f, on a $d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq k\, d(a,b)$ or $k < 1$ donc $d(a,b) = 0$ ($a = b$)

d'où l'unicité.

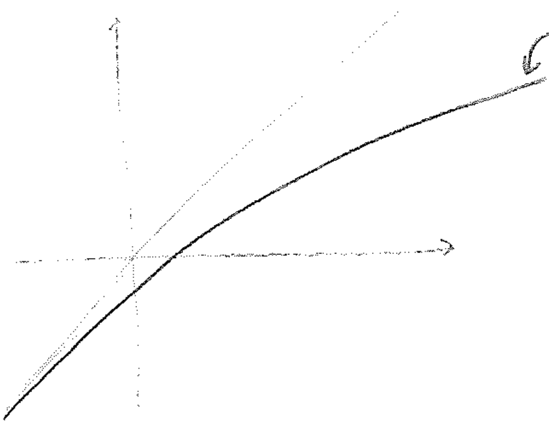
- Enfin, étant donné $y \in E$ et (y_n) son orbite par f, on a immédiatement par récurrence que $d(y_n, a) \leq k^n d(y, a)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Les applications sont nombreuses ! Notamment le thm d'inversion locale en calcul diff, le thm de Cauchy-Lipschitz en équa diff...
(Il existe d'autres thm de point fixe sans hypothèse de contract° mais basés sur la topologie de l'espace E concerné (ex : Brouwer)

R4 les hypothèses sont nécessaires

1) $(E,d) = (]0,+\infty[, |\ |)$, $f : x \mapsto \frac{x}{2}$. L'appl est bien contractante mais n'a pas de pt fixe dans E. Le pb est qu'ici E n'est pas complet (car pas fermé dans $(\mathbb{R}, |\ |)$ complet)

2) Une f satisfaisant $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ $\forall x,y \in E$ n'est pas nécessairement contractante.



n'importe quelle fct° C^1 dt la dérivée $\in]0,1[$ et tend vers 1 qd part sans l'atteindre

↳ on voit bien sur le dessin que ça n'a pas de pt fixe (intersect° du graphe de la 1ère bissectrice)