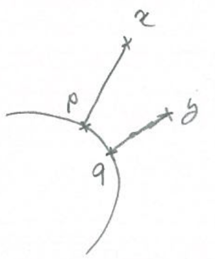
Preuve . $\forall c \in C$, $P(c) = c$ donc $\forall x \in E$, $P(x) \in C$ donc $P(P(x)) = P(x)$

. Soient $x, y \in E$. Notons $p = P(x)$ et $q = P(y)$.



$$\mathrm{Re}\langle x-p, q-p\rangle \leq 0$$
$$\mathrm{Re}\langle y-q, p-q\rangle \leq 0$$
$$\| \quad \mathrm{Re}\langle q-y, q-p\rangle$$

donc $\mathrm{Re}\langle x-p+q-y, q-p\rangle \leq 0$

$$\| \quad \mathrm{Re}\langle x-y, q-p\rangle \underbrace{- \mathrm{Re}\langle p-q, q-p\rangle}_{= +\|q-p\|^2}$$

Ainsi $\|q-p\|^2 \leq |\langle x-y, q-p\rangle| \underset{CS}{\leq} \|x-y\| \|q-p\|$ ce qui entraîne bien

$\|q-p\| \leq \|x-y\|$. □

Proposition (cas particulier important) $C = F \subset E$, où F est un sev complet.

Dans ce cas, 1) $P : E \to F$ est linéaire (projection orthogonale de E sur F)

2) le projeté p d'un point $x \in E$ est caractérisé par :

$$\langle x-p, y\rangle = 0, \forall y \in F.$$

Preuve Si $y \in F$, on peut à nouveau utiliser (*), cette fois pour tout $t \in \mathbb{R}$. On trouve ainsi que $\mathrm{Re}(\langle x-p, y-p\rangle) = 0$ $\forall y \in F$, donc aussi que $\mathrm{Re}\langle x-p, y\rangle = 0$ $\forall y \in F$ puisque $p \in F$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en remplaçant y par iy, on obtient $\mathrm{Im}(\langle x-p, y\rangle) = 0$ et finalement $\langle x-p, y\rangle = 0$ $\forall y \in F$.

Cette propriété caractérise évidemment p puisque $\mathrm{Re}\langle x-p, y\rangle \leq 0$ le caractérisait déjà !

Soient maintenant $x_1, x_2 \in E$ et $p_1, p_2 \in F$ tq $\langle x_1 - p_1, y\rangle$ et $\langle x_2 - p_2, y\rangle \leq$ ... $\forall y \in F$. Alors $\langle x_1 + x_2 - p_1 + p_2, y\rangle = 0$ $\forall y \in F$ et $p_1 + p_2 \in F$ donc $p_1 + p_2 = P(x_1 + x_2)$

Même chose pour $P(\lambda x) = \lambda P(x)$ $\forall x \in E$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, ce qui donne la linéarité □

Corollaire : Si E est un espace préhilbertien et $F \subset E$ un sous espace complet, alors $E = F \oplus F^\perp$, où

$F^\perp = \{x \in E \mid \langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in F\}$ est un sous espace fermé.

Exercice : Réfléchir à un contre-exemple dans le cas où F n'est pas complet.

Dem Tout $x \in E$ s'écrit $P(x) + (x - P(x))$ avec $\langle x - P(x), y\rangle = 0$ $\forall y \in F$ donc $x - P(x) \in F^\perp$, et $P(x) \in F$. Ainsi $E = F + F^\perp$.

La somme est directe car si $x \in F \cap F^\perp$, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$ donc $x = 0$ □ (*)

Rq Si $(E, \langle\,,\,\rangle)$ est un espace de Hilbert et $F \subset E$ un sev fermé ($\Rightarrow$ complet), alors $F^\perp$ est aussi fermé ($\Rightarrow$ complet) et F et $F^\perp$ jouent des rôles symétriques.

P est la proj $\perp$ de E sur F, $id_E - P$ est la proj $\perp$ de E sur $F^\perp$.

(*) $F^\perp = \bigcap_{y \in F} f_y^{-1}(\{0\})$ où $f_y : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle x, y\rangle \end{array}$ Cette appli est $\|y\|$-lip par CS donc continue donc $F^\perp$ est bien fermé.

2) Familles orthonormées, bases hilbertiennes

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension infinie

Déf On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est orthonormée si
$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

On va voir que tout espace préhilb de dim ∞ contient de telles familles

Lemme Etant donnée une telle famille, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \mathrm{Vect}_{0 \le i \le n}(e_i)$ et P_n la projection orthogonale de E sur F_n. Alors
$$\forall x \in E, \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \quad (*)$$

Preuve Soit $x \in E$ et notons $Q_n(x)$ le terme de droite de $(*)$. Alors par linéarité à gauche, $\forall j \in \{0, \dots, n\}$,
$$\langle Q_n(x), e_j \rangle = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$$
Donc $\langle x - Q_n(x), e_j \rangle = 0 \ \forall j$ donc $x - Q_n(x) \in F_n^{\perp}$, ce qui donne bien $P_n(x) = Q_n(x)$. □

Comme $x - P_n(x) \perp P_n(x)$, par Pythagore,
$$\|x\|^2 = \|x - P_n(x)\|^2 + \|P_n(x)\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linéarité et} \\ \text{ou pythagore}}}{=} \|x - P_n(x)\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$$
et on obtient en particulier l'inégalité de Bessel : $\sum_i |\langle x, e_i \rangle|^2$ cv et
$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \le \|x\|^2 \quad \forall x \in E}$$

Proposition Si maintenant $(E, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert et $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est tjs une famille orthonormée, alors $\forall x \in E$, $P_n(x)$ cv et
$$P(x) = \lim_{n \to +\infty} P_n(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$$
est le projeté orthogonal sur $\overline{F}$ où F est le sous-espace vectoriel engendré par $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Preuve Pour $x \in E$ fixé, si $m > n \in \mathbb{N}$ on a
$$\|P_m(x) - P_n(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |\langle x, e_i \rangle|^2$$
$$\le \sum_{i=n+1}^{+\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \quad \left(\text{existe et } \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ par l'} \le \text{ de Bessel}\right)$$

Donc $(P_n(x))_n$ est de Cauchy dans E complet donc converge.

Notons $P(x)$ sa limite. Comme $P_n(x) \in F$ $\forall n \in \mathbb{N}$, il est clair que $P(x) \in \overline{F}$. En outre, $\forall j$, $\langle x - P_n(x), e_j \rangle = 0$ $\forall n \geq j$ donc par passage à la limite dans une application continue, $\langle x - P(x), e_j \rangle = 0$

Ainsi $x - P(x) \in F^\perp$.

Notons que $F^\perp = \overline{F}^\perp$. Comme $F \subset \overline{F}$, on a clairement $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$. Pour la réciproque, il faut encore une fois utiliser la continuité de $\langle z, \cdot \rangle : E \to \mathbb{K}$.

Soit $z \in F^\perp$. Alors $\langle z, \cdot \rangle$ est nulle sur F. Mais elle admet un unique prolongement par continuité à $\overline{F}$, nul donc, ce qui signifie que $\langle z, y \rangle = 0$ $\forall y \in \overline{F}$, ie que $z \in \overline{F}^\perp$.

donc $x - P(x) \in \overline{F}^\perp$, ce qui montre que $P(x)$ est la proj $\perp$ de x sur $\overline{F}$. □

Proposition. Avec les notations de la proposition précédente, les prop suivantes sont équiv. :

1) $\overline{F} = E$

2) $F^\perp = \{0\}$ (ie $\langle x, e_i \rangle = 0$ $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$)

3) $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$

4) $\forall x \in E$, on a l'égalité de Parseval $\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$.

On dit que la famille $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E si elle possède l'une de ces propriétés.

Rq ⚠ Une base hilbertienne est une base topologique au sens que l'on verra plus loin, pas une base algébrique ($\forall$ élt de E ne se décompose pas en une combinaison linéaire finie d'élts de cette famille)

On verra d'ailleurs qu'un Banach de dimension ∞ ne peut avoir de base algébrique dénombrable grâce au thm de Baire.

Dem 1)⇔2) $\overline{F} = E \overset{\oplus}{\Leftrightarrow} \overline{F}^\perp = \{0\} \overset{\text{ci-dessus}}{\Leftrightarrow} F^\perp = \overline{F}^\perp = \{0\}$.

3)⇔4) On rappelle que $\|x\|^2 = \underbrace{\left\| x - \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2}_{u_n} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2}_{v_n}$

Si 3), $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\|u_n\|^2$ aussi donc on obtient 4).

Si 4), $v_n \to \|x\|^2$ donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et on a 3)

3) ⇒ 2) évident !

2) ⇒ 3) $\forall x \in E$, $x - P(x) = x - \sum_{i=0}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \in F^\perp = \{0\}$ donc ... □

Exemple $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. On a une base hilbertienne "canonique" $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$,

$$e_k = (0, 0, \dots, \underset{k^e \text{ terme}}{1}, 0, \dots\dots)$$

Le fait que ce soit bien une base hilbertienne se voit par exemple avec 4)

C'est la définition de $\| \ \|_2$.