§2 Espaces de Hilbert

Dans ce §, E est un $\mathbb{K}$ev avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

(A) Espaces préhilbertiens

Déf On appelle <u>produit scalaire</u> sur E une application

$$\langle\, ,\, \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$
$$(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$$

possédant les propriétés suivantes :

a) $\langle x,x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in E$ et $\langle x,x \rangle = 0$ ssi $x = 0$ (positivité)

b) $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle} \quad \forall x,y \in E$ (symétrie)

c) $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle \quad \forall x,y,z \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$ (linéarité à gauche)

Espace préhilbertien : espace muni d'un produit scalaire.

Rq Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un produit scalaire est dc une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E (oublier la conj ds b)

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, un produit scalaire est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

(sesqui-linéaire : lin % à un arg^t, antilin % à l'autre
$3/2$
hermitienne : b) ac conjugaison complexe)

La dénomination "espace préhilbertien" n'est pas très parlante. On va voir ensuite que les espaces de Hilbert sont des espaces préhilbertiens qui ont en outre la propriété de complétude

préhilbertien de dim finie =: espace euclidien

en anglais : unitary space

Exemples

- produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

- produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$: $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

- $E = C(I, \mathbb{K})$ ($I = [a,b]$) : $\langle f,g\rangle = \int_I f(x)\overline{g(x)}\,dx$

Notation Etant donné un espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$,

on note $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

C'est une norme.

Preuve
- positivité et séparation sont évidentes
- homogénéité découle de la linéarité de $\langle , \rangle$
- inégalité triangulaire :

Prop (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$\forall x,y \in E \quad |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

En outre, on a égalité ssi x,y sont linéairement dépendants

Preuve Si $\langle x,y\rangle = 0$, la conclusion est vraie

Si $\langle x,y\rangle \neq 0$ (en particulier $x,y \neq 0$), par linéarité, il suffit de considérer le cas $\|x\| = \|y\| = 1$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a $0 \leq \|x+\lambda y\|^2 = \langle x+\lambda y \mid x+\lambda y\rangle$

$= \|x\|^2 + \lambda\langle y,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2$

$= 1 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{\lambda}\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2$

pour $\lambda = -\langle x,y\rangle$, on obtient $= 1 - 2|\langle x,y\rangle|^2 + |\langle x,y\rangle|^2 \geq 0$

ie $|\langle x,y\rangle|^2 \leq 1$, ce qu'on voulait $\square$

(en cas d'égalité on a $x+\lambda y = 0$ dc colinéarité)

Corollaire (Inégalité de Minkowski)

$\forall x,y \in E \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, ac égalité ssi x et y sont positivement colinéaires

Preuve $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \|y\|^2$

$$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$$

$$\underset{CS}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\|+\|y\|)^2$$

ac égalité ssi égalité ds les deux inégalités, soit $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$ → colinéarité et $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|$ → rapport de colinéarité réel positif. □

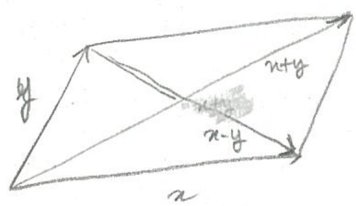
Proposition Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée.

a) $\forall x,y \in E$ tq $\langle x,y\rangle = 0$, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Pythagore)

b) $\forall x,y \in E$, on a

$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ (identité du parallélogramme)

Preuve il suffit de remarquer que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$ (déjà vu)



Proposition (identité de polarisation)

a) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x,y \in E$, $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

b) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\forall x,y \in E$, $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$

Exo

Dem Calcul direct

L'intérêt est d'exprimer le produit scalaire en terme de la norme.

Appl Si $(E, \|\ \|)$ est un evn, on peut définir $\langle,\rangle$ par l'identité de polarisation. On vérifie alors que $\langle,\rangle$ est un produit scalaire ssi $\|\ \|$ satisfait l'identité du ▱. Cette identité caractérise donc les normes associées à des produits scalaires.

Une autre spécificité des normes issues d'un produit scalaire :

Prop Si E est un espace préhilbertien, toute boule fermée $\overline{B}(a,r)$ est strictement convexe dans le sens suivant : si $x, y \in \overline{B}(a,r)$ avec $x \neq y$ et $t \in]0,1[$ alors $(1-t)x+ty \in B(a,r)$
[boule ouverte !

Ça a son importance dans des pb d'optimisation (Reformulat° : l'intervalle ouvert $]x,y[$ est inclus dans $B(a,r)$)

Dem Par translation et homothétie on peut se ramener au cas $a=0$ et $r=1$ (rédiger ce que cette phrase signifie)

Si $\|x\|<1$ ou $\|y\|<1$, l'inégalité $\|(1-t)x+ty\| \underset{(*)}{\leq} (1-t)\|x\| + t\|y\| < 1$ pour $t \in]0,1[$ donne directement : $(1-t)x+ty \in B(0,1)$

Si $\|x\| = \|y\| = 1$, on a inégalité stricte dans Minkowski $(*)$ sauf si $(1-t)x$ et ty sont positivement liés, or si $t \neq 0,1$, ceci n'est possible que si $x=y$, qui est exclu. □

Rq $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas des normes euclidiennes, leurs boules unités ne sont pas strictement convexes : leurs bords contiennent des segment entiers.

B) Espaces de Hilbert

Déf Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.

Ce sont donc des cas particuliers d'espaces de Banach (ceux dont la norme satisfont l'identité du parallélogramme), et on peut donc leur appliquer tout le §.

ex $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_2)$, $(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$

$(\mathbb{K}^n, \|\ \|_2)$: issue du produit scalaire standard

(on peut noter indifféremment $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_2)$ ou $(\mathbb{K}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ vu que $\|\ \|$ et $\langle\ ,\ \rangle$ se déterminent mutuellement)

$(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$: vérifier qu'elle provient du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$$

(il faut justifier que si $u, v \in \ell^2$, cette série converge ...)

⚠ $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{K}), \|\ \|_2)$ n'est pas un espace de Hilbert.

$\|\ \|_2$ est bien associée à un produit scalaire $\left(\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\overline{g}\right)$

Mais l'espace vectoriel normé obtenu n'est pas complet comme nous l'avons vu précédemment.

1) Projection orthogonale

Ce premier résultat ne suppose pas E de Hilbert mais le sous-ens considéré complet

Proposition : (projection sur un convexe complet)

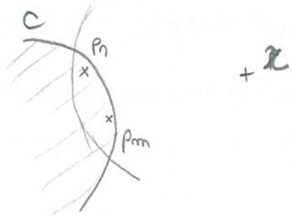
Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien et $C \subset E$ un sous ensemble convexe, non vide et complet. Alors $\forall x \in E$,

1) $\exists !\, p \in E$ tq $\|x-p\| = \mathrm{dist}(x, C)$. On l'appelle proj orthogonal de p sur C

2) p est l'unique point de E qui vérifie :
$$\mathrm{Re}(\langle x-p, y-p\rangle) \leq 0 \qquad \forall y \in C$$

Rq. Trouver des contre-exemples si on enlève des hypothèses.

dém 1) Soit (p_n) une suite dans C tq $\|p_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{dist}(x,C)$. Nous allons montrer qu'une telle suite est nécessairement de Cauchy. En effet, si $n, m \in \mathbb{N}$, par l'identité du parallélogramme,



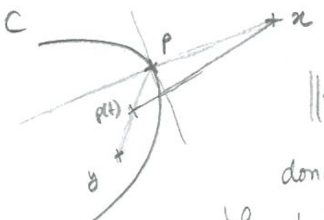
$$\|p_n - x\|^2 + \|p_m - x\|^2 = \frac{1}{2}\|p_n + p_m - 2x\|^2 + \frac{1}{2}\|p_n - p_m\|^2$$
$$\frac{1}{2}\|p_n + p_m - 2x\|^2 = \underbrace{2\Big\|\underbrace{\frac{p_n+p_m}{2}}_{\in C} - x\Big\|^2}_{\geq \mathrm{dist}(x,C)^2}$$

donc $\|p_n - p_m\|^2 \leq 2\left(\|p_n - x\|^2 + \|p_m - x\|^2 - 2\,\mathrm{dist}(x,C)^2\right) \underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc (p_n) est bien de Cauchy dans C, qui est supposé complet, donc elle converge. Notons p sa limite. Par construction, $p \in C$ et $\|p - x\| = \mathrm{dist}(x, C)$

Si p' est un point de C ayant également cette propriété, toujours par l'id du $\square$,
$$\|p-p'\| \leq 2\underbrace{\left(\|p-x\|^2 + \|p'-x\|^2 - 2\,\mathrm{dist}(x,C)^2\right)}_{=0}$$
donc $\underline{p = p'}$, ce qui donne l'unicité.

2) Soit $y \in C$ et soit, $\forall t \in [0,1]$, $p(t) = (1-t)p + ty = p + t(y-p)$



Alors $\forall t \in [0,1]$,
$$\|x - p(t)\|^2 = \|x-p\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle x-p, y-p\rangle + t^2\|y-p\|^2 \quad (*)$$

donc par déf de p, $-2t\,\mathrm{Re}\langle x-p, y-p\rangle + t^2\|y-p\|^2 \geq 0$.

En prenant t assez petit on obtient $\mathrm{Re}\langle x-p, y-p\rangle \leq 0$.

Inversement, si $\mathrm{Re}\langle x-p, y-p\rangle \leq 0$, $(*)$ donne $\|x-y\|^2 \geq \|x-p\|^2$ $\forall y \in C$ donc p est le projeté de p sur C, ce qui donne l'unicité d'après 1.

Rq importante. Si $(E, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert, la proposition s'applique à tout convexe fermé (fermé dans complet $\Rightarrow$ complet) de E.

Définition Proposition : Avec les notations de la proposition précédente, on définit la projection $P : X \to C$ par $P(x) = p$ où $\|x - p\| = \mathrm{dist}(x, C)$. On a alors

1) $P \circ P = P$

2) $\|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in E$.