2) Familles orthonormées, bases hilbertiennes dénombrables

On se place dans un espace préhilbertien $(E, \langle , \rangle)$.

Def Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite orthonormée si $\forall i,j \in I$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

(I : ensemble d'indices quelconque)

Dans la suite on se restreint au cas d'une famille $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ orthonormée dénombrable (on verra tout à l'heure comment construire de telles familles).

On note $F = \text{Vect}(\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}})$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$

C'est un sev de dim finie, donc complet (muni de la norme induite) donc la proj $\perp$ sur F_n, notée P_n, est bien définie.

Proposition Avec ces notations, $\forall x \in E$

1) $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$. $(*)$

2) $\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2$ cv et $\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (Inégalité de Bessel)

Preuve 1) Notons $Q_n(x)$ le terme de droite de $(*)$

Par linéarité à gauche, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\langle Q_n(x), e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$

Donc $\langle x - Q_n(x), e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle Q_n(x), e_j \rangle = 0$

Ainsi $x - Q_n(x) \in F_n^{\perp}$

Rappel : le projeté orthogonal de x sur F_n est l'unique $p \in F_n$ tq $x - p \in F_n^{\perp}$

Ainsi $Q_n(x)$ est ce projeté $\perp$, ie $Q_n(x) = P_n(x)$, ce qu'on voulait.

2) $x = \underbrace{P_n(x) + (x - P_n(x))}_{\perp}$ donc par Pythagore $\|x\|^2 = \|P_n(x)\|^2 + \underbrace{\|x - P_n(x)\|^2}_{\geq 0}$

Également par Pythagore, $\|P_n(x)\|^2 = \Big\| \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k}_{\text{orthogonaux 2 à 2}} \Big\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \|\langle x, e_k \rangle e_k\|^2$

$\overset{\text{homogénéité}}{=} \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \underbrace{\|e_k\|^2}_{1}$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n} \underbrace{|\langle x, e_k \rangle|^2}_{\geq 0} \leq \|x\|^2$, série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées $\longrightarrow$ converge

et $\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Certains reconnaîtront l'inégalité de Bessel vue pour les séries de Fourier :

$E = C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\bar{g}$, la norme associée est notée $\|.\|_2$

$e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{ikt}$ (c'est bien C^0, 2π périodique)

$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée (exercice) dénombrable (indexée sur $\mathbb{Z}$, mais on pourrait rénuméroter)

$$\forall f \in E, \ \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\,dt = c_k(f) \quad k^e \text{ coeff de Fourier}$$

La proposition donne (adaptée à $\mathbb{Z}$) : $\sum_k |c_k(f)|^2$ converge et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$

On a mieux pour les séries de Fourier (Parseval), et cela vient du fait que cette famille n'est pas seulement orthonormée mais totale. Et c'est en fait un énoncé très général

Proposition Soit $(E, \langle . \rangle)$ préhilbertien, $\mathcal{E} = \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée

EQU
(i) $\overline{\mathrm{Vect}(\mathcal{E})} = E$

(ii) $\forall x \in E$, $\underset{\|}{(P_n(x))}$ cv vers x (pour $\|.\|$ associée à $\langle , \rangle$),

ie $\sum_k \langle x, e_k \rangle e_k$ cv et $\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k}_{\text{par def : limite au sens de } \|.\|} = x$

(iii) $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ (égalité de Parseval) (*)

Def Une famille orthonormale dénombrable satisfaisant l'une de ces prop est une base de Hilbert dénombrable de E (cf andos)

Preuve (i) ⇒ (ii) : Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $\exists y \in F$ tq $\|x - y\| < \varepsilon$

y est une combinaison linéaire (finie) d'éléments de $\mathcal{E}$

$\to \exists n_0$ tq $y \in F_{n_0}$

Mais comme $P_{n_0}(x)$ satisfait $\|x - P_{n_0}(x)\| = \inf\{\|x - z\|, z \in F_{n_0}\}$,

$\|x - P_{n_0}(x)\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$

En outre, $\forall n \geq n_0$, $\|x - P_n(x)\| = \inf\{\|x - z\|, z \in F_n\}$, et $P_{n_0}(x) \in F_{n_0} \subset F_n$

donc $\|x - P_n(x)\| \leq \|x - P_{n_0}(x)\| \leq \varepsilon$

On a bien montré que $\|x - P_n(x)\| \to 0$ ie $(P_n(x))$ cv vers x.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) immédiat : tout $x \in E$ est limite d'éléments de F ($P_n(x)$!)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) On reprend Pythagore : $\|x\|^2 = \underbrace{\|x - P_n(x)\|^2}_{\substack{\to 0 \\ \text{par hyp}}} + \underbrace{\|P_n(x)\|^2}_{\sum_{k=0}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2 \} (*)_m}$

Cela dit exactement que la série $\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2$ (dont on savait déjà qu'elle cv) a pour somme $\|x\|^2$.

(iii) et (ii) toujours avec Pythagore : si $(*)_m \to \|x\|^2$ (ce que dit Parseval), alors

$\|x - P_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - (*)_m \longrightarrow 0$, donc $(P_n(x))$ cv vers x. $\square$

Retour sur l'exemple : $F = \mathrm{Vect}(\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}})$ est le sev de E des polynômes trigonométriques, dont on peut montrer qu'ils sont denses dans $C^0_{2\pi p}$ soit par un thm de Weierstrass, soit par le thm de Dirichlet (cf Séries de Fourier)

Donc on a Parseval : $\forall f \in C^0_{2\pi p}$ $\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$

(Vrai en fait plus généralement mais dépasserait notre cadre actuel)

⚠ Dans le cadre des séries de Fourier, (ii) n'affirme pas que $\sum_k c_k(f) e_k$ converge simplement ou uniformément vers f.

Ça n'affirme pas notamment que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}$

Cela affirme juste la convergence en norme $\|\cdot\|_2$, plus faible.

Ex plus simple. Dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on a une base H "canonique" : $e_k = (0, \dots 0, \underset{k^e}{1}, 0 \dots)$. (Exo)

Rq importante Si $(E, \langle , \rangle)$ est un Hilbert ① • (i) $\Longleftrightarrow$ $F^\perp = \{0_E\}$

En effet, $\bar{F}$ est un sev fermé d'un Hilbert et on a vu que ds ce cas

$E = \bar{F} \oplus \bar{F}^\perp$ donc $\bar{F} = E \Longleftrightarrow \bar{F}^\perp = \{0_E\} \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{F}^\perp = F^\perp}}{\Longleftrightarrow} F^\perp = \{0_E\}$.

② • Dans le cas général (où $\bar{F} \neq E$), $(P_n(x))$ cv vers le proj $\perp$ $P(x)$ de x sur $\bar{F}$ (bien défini car $\bar{F}$ sev complet d'un espace préhilbertien)

Aucune de ces affirmations n'est vraie en général si E n'est pas supposé complet.
(il y a des contre exemples)

Preuve du 2^e point :

- $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans un evn complet donc converge. On note $P(x)$ la limite ($\in \bar{F}$ par def)

  $\hookrightarrow \|P_m(x) - P_n(x)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2$

  Or $\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2$ CV donc ses sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2\right)_m$ forment une suite convergente donc de Cauchy.

- $x - P(x) \in F^\perp$. En effet pour $\forall j \in \mathbb{N}$, $\langle x - P_n(x), e_j\rangle = 0 \ \forall n \geq j$

  $\left(x - P_n(x) \in F_n^\perp \subset F_j^\perp \text{ car } F_j \subset F_n \right)$

  Or l'application $y \mapsto \langle y, e_j\rangle$ est (linéaire) continue

  Donc par passage à la limite $_{n\to+\infty}$, $\langle x - P(x), e_j\rangle = 0$

  or $F^\perp = \bar{F}^\perp$ donc $x - P(x) \in \bar{F}^\perp$ et on a vu que cela caractérisait le projeté orthogonal de x sur $\bar{F}$. $\square$

CNS d'existence d'une base hilb dénombrable : séparabilité ⚠ $\neq$ caractère séparé

Def Un espace topologique (notion très générale !) est séparable s'il admet une famille dénombrable dense

(ex : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, mais aussi $\left(C^0_{2\pi_p}, \|\ \|_2\right)$ comme on va le voir tout de suite)

$C^0([0,1], \|\ \|_\infty)$, polynômes à coeff dans $\mathbb{Q}$...

Proposition Un espace préhilbertien admet une base hilbertienne dénombrable (finie ou) ssi il est séparable

Preuve $\Leftarrow$ Si E admet une BH den, les CL à coeff dans $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) d'éléments de la base H forment une famille dénombrable dense (Exo !)

$\Longrightarrow$ Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille den. dense

On va fabriquer à partir de là une famille ON den (jusque là complètement général, n'utilise pas la densité), finie et base alg si E est de dim finie, infinie sinon, et dans ce cas, on utilisera la densité pour mq c'est une base hilb.

Initialisation : • si $x_k = 0$ $\forall i$, $E = \overline{\{x_k, k \in \mathbb{N}\}} = \{0_E\}$ → base vide

• sinon, soit $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \neq 0\}$. On pose $e_0 = \frac{x_{k_0}}{\|x_{k_0}\|}$

• récurrence : on suppose $e_0, \dots, e_{n-1}$ déjà construits (ON)

(plus précisément : $\exists\, k_0 < \dots < k_{n-1}$ tq $\forall j \leq n-1$ $\mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_j) = \mathrm{Vect}\{x_k, k \leq k_j\}$)

a) si $\mathrm{Vect}(e_k, 0 \leq k \leq n-1) = E$, on a fini → $(e_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base Hilbertienne de E

b) sinon on pose $k_n = \min\{k > k_{n-1},\ x_k \notin \mathrm{Vect}(e_0 - e_{n-1})\}$

on pose $\tilde{e}_n = x_{k_n} - \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \langle x_{k_n}, e_j \rangle e_j}_{\text{Proj} \perp \text{ de } x_{k_n} \text{ sur } \mathrm{Vect}(e_0 - e_{n-1})}$

et $e_n = \frac{\tilde{e}_n}{\|\tilde{e}_n\|}$

Par construction, $(e_0, \dots, e_n)$ est orthonormée

Si le processus ne s'arrête pas après un nb fini d'étapes, alors on obtient $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est orthonormée.

Par construction, $x_j \in \mathrm{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ $\forall j$ donc $\underbrace{\overline{\{x_j\}}}_{E} \subset \overline{\mathrm{Vect}\, \mathcal{E}}$. □

---

3) Thm de Représentation de Riesz dans les Hilbert

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien

Lemme $\forall y \in E$, $l_y : E \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire continue, et $|||l_y||| = \|y\|$.

Preuve : • linéaire par linéarité à gauche de $\langle , \rangle$.

• $\forall x \in E$, $|l_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ par Cauchy Schwarz

donc l_y est C^0 et $|||l_y||| \leq \|y\|$.

En outre, si $y = 0$, on a égalité, et si $y \neq 0$, $x = \frac{y}{\|y\|}$ est de norme 1 et satisfait $|l_y(x)| = \langle \frac{y}{\|y\|}, y \rangle = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|$ donc $|||l_y||| = \|y\|$

Thm (de représentation ...) Dans un espace de Hilbert $(E, \langle , \rangle)$, pour tout $\ell \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$,

$$\boxed{\exists!\, y \in E \text{ tq } \ell = \ell_y \text{, ie tq } \forall x \in E,\ \ell(x) = \langle x, y \rangle.}$$

Preuve

on suppose $\ell \neq 0$ sinon $y = 0$ convient.

- Existence : Analyse : si un tel y existe (tq $\ell = \ell_y$), $\forall x \in \underbrace{\ker \ell}_{F \text{ fermé car } \ell\ C^0}$, $\langle x, y \rangle = 0$, ie $y \in F^\perp$.

Remarque : $F^\perp$ est de dimension 1 car :

$E = F \oplus F^\perp$ (Hilbert) supplémentaire du noyau d'une forme linéaire non nulle $\to$ de dim 1 !

$\to F^\perp = \mathbb{K} z$ avec z tq $\ell(z) \neq 0$ (sinon $\ell = 0$) ($\ell(z) = 1$ quitte à prendre $\frac{z}{\ell(z)}$)

Donc si y existe, $y = \lambda z$ ac le z ci-dessus et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, et on veut $\ell(y) = \|y\|^2$

ie $\lambda = \frac{|\lambda|^2}{\lambda \bar{\lambda}} \|z\|^2$

ie $\bar{\lambda} = \frac{1}{\|z\|^2}$

(en particulier $\lambda = \bar{\lambda}$ réel)

Synthèse : Avec z comme ci-dessus, posons $y = \frac{z}{\|z\|^2}$

Alors $\ell = \langle , y \rangle$ coïncident sur F par construction

une base de $F^\perp$ $(\{y\})$

dc sur $F^\perp$

donc sur $E = F \oplus F^\perp$.

- Unicité : Si $\ell = \ell_{y_1} = \ell_{y_2}$ avec $y_1, y_2 \in E$,

$\forall x \in E$, $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle - \langle x, y_2 \rangle = \ell(x) - \ell(x) = 0$

En particulier pour $x = y_1 - y_2$ cela donne $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$ ie $y_1 = y_2$

$\square$