On va voir qu'il s'agit d'un exemple d'espace de Hilb. séparable

⚠ séparable $\neq$ séparé

Déf Un espace topologique est séparable s'il possède une partie dénombrable dense.

Proposition. Un espace de Hilbert admet une base de Hilbert dénombrable ssi il est séparable.

Preuve $\Leftarrow$ Si E admet une base hilbertienne dénombrable, les combinaisons linéaires à coeff dans $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) d'éléments de la base forment une famille dénombrable dense (à vérifier) donc E est séparable.

$\Rightarrow$ Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E.

. Si $x_i=0$ $\forall i$, $E=\{0\}$ et on a fini.

. Sinon, on note i_0 le 1er i tq $x_i\neq 0$ et on pose $e_0=\dfrac{x_{i_0}}{\|x_{i_0}\|}$.

. Par récurrence, si $e_0,\dots e_{n-1}$ ont déjà été construits, avec $i_0<i_1<\dots<i_{m-1}$, on procède ainsi :

a) Si $\mathrm{Vect}(e_i, 0\leq i\leq m-1)=E$, alors $\dim E=m$ et $(e_i)_{i=0,n-1}$ est une base hilbertienne de E

b) Sinon, on prend le plus petit $i_{>i_{m-1}}$ tq $x_i\notin \mathrm{Vect}(e_i, 0\leq i\leq m-1)$, on le note i_m, et on définit

$$e_n=\frac{\tilde{e}_n}{\|\tilde{e}_n\|} \quad \text{où} \quad \tilde{e}_n = x_{i_m} - \underbrace{\sum_{i=0}^{m-1}\langle x_{i_m}, e_i\rangle e_i}_{\text{proj}\perp \text{ de } x_{i_m} \text{ sur } \mathrm{Vect}(e_i,\, i\leq m-1)}$$

Par construction, $\|e_n\|=1$ et $\langle e_n, e_i\rangle=0$ $\forall i<m$

En outre, $\langle e_0,\dots,e_n\rangle \ni \{x_0,x_1,\dots,x_{i_m}\}$

Si le processus ne s'arrête pas après un nb fini d'étapes, alors $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E (elle satisfait $\overline{\mathrm{Vect}(e_i)}_{i\in\mathbb{N}} \supset \overline{\{x_i\}}=E$. □

Exemples : - $L^2([0,1],\mathbb{C})$ espace des classes d'équiv de fonctions mesurables de carré intégrable sur $[0,1]$ ($f\sim g \Leftrightarrow f=g$ en dehors d'un ens. de mesure nulle), muni de $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f\bar{g}$ est séparable. Il admet pour base hilbertienne $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, où $e_n : [0,1] \to \mathbb{C}$, $x\mapsto e^{2i\pi n x}$

-

3) Thm de représentation de Riesz

Soit E un espace préhilbertien et $y \in E$. On définit l'application $l_y : E \to \mathbb{K}$ par

$$\forall x \in E, \quad l_y(x) = \langle x, y \rangle$$

Alors l_y est une forme linéaire continue et $|||l_y||| = \|y\|$.

En effet, il est clair que l_y est linéaire. et par Cauchy-Schwarz,

$\left(\forall x \in E \quad |l_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \right) \Rightarrow l_y \ C^0$ et $|||l_y||| \leq \|y\|$

Si $y = 0$, alors $l_y = 0$. Sinon, on prend $x = \frac{y}{\|y\|} \in S$ et on trouve $l_y(x) = \|y\|$ donc $|||l_y||| \geq \|y\|$. □

Théorème de représentation de Riesz Dans un espace de Hilbert E

pour toute forme linéaire continue $l : E \to \mathbb{K}$, $\exists! \, y \in E$ tq

$\forall x \in E, \quad l(x) = \langle x, y \rangle \quad (*)$

Dem Unicité : Si $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle \ \forall x \in E$, $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$ et en prenant $x = y_1 - y_2$ on obtient $\|y_1 - y_2\| = 0$ soit $y_1 = y_2$.

Existence : Si $l = 0$, on prend $y = 0$. Si $l \neq 0$, $F := \mathrm{Ker}(l)$ est un sev fermé (donc complet) de E et on note P la proj. $\perp$ de E sur F.

Soit $z_1 \in E$ tq $l(z_1) = 1$ (existe car $l \neq 0$ et l linéaire), et posons $z = z_1 - P(z_1)$. Alors $l(z) = 1$, $z \in F^\perp$, et $l(z) = \langle z, \frac{z}{\|z\|^2} \rangle$

Posons enfin $y = \frac{z}{\|z\|^2}$. Vérifions que $(*)$ est vérifié :

- Si $x \in F = \mathrm{Ker}\, l$, $l(x) = 0 = \langle x, y \rangle$ car $y \in F^\perp$
- Si $x \in F^\perp$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $x = \lambda z$, et alors $l(x) = \lambda l(z) = \lambda$, donc $x = l(x) z$, et $\langle x, y \rangle = \langle l(x) z, \frac{z}{\|z\|^2} \rangle = l(x)$.

Comme $E = F \oplus F^\perp$, ceci conclut. □

Corollaire L'application
$$E \longrightarrow E' \text{ (dual topologique de } E)$$
$$y \longmapsto l_y$$
est une isométrie (anti-) linéaire. Il s'ensuit que E' est isomorphe à E si E est un Hilbert

⚠ Le thm de rep. de Riesz n'est pas valable dans les espaces seulement préhilbertiens. Exo $E = C([-1,1], \mathbb{R})$ muni de $\| \ \|_2$ et $l : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f - \int_{-1}^0 f$

Vérifier que si $l = l_g$ alors $g = 1$ sur $[0,1]$ et -1 sur $[-1,0]$. Impossible dans E.