Chap 4 : Complétude et applications

Pourquoi on les aime tant ? Parce qu'ils permettent de faire plein de choses qu'on ne peut pas faire dans les espaces métriques quelconques.
Ils donnent principalement des résultats d'existence

(• point fixe d'applications contractantes
↳ solutions d'équa-diff
↳ théorème d'inversion locale, des fonctions implicites
↳ méthode de Newton (recherche de 0 de fonctions)
• fonctions continues partout dérivables nulle part
• existence de prolongements continues d'applications ...)

On va s'intéresser dans un premier tps au cas particulier des espaces de Banach, puis au cas encore plus particulier des espaces de Hilbert, puis on reviendra à des thm généraux sur les e.m. complets.

Rappels
- Un e.m. est complet si toutes ses suites de Cauchy convergent (def)
- Un e.m compact est complet
- Dans (E,d) e.m, $A \subset E$ complet $\Rightarrow$ A fermé
- Dans (E,d) e.m complet, $A \subset E$ fermé $\Rightarrow$ (A, d_A) complet

§1. Espaces de Banach

Rappel Un espace de Banach est un evn $(E, \| \|)$ complet.

(A) Exemples importants

1) $(\mathbb{K}^n, \| \|_p)$ $(p \in [1,+\infty[, n \in \mathbb{N}^*)$

Prop $\forall n, \forall p$, cet espace est complet.

En effet, il suffit de le vérifier pour $p = +\infty$ par équivalence des normes sur $\mathbb{K}^n$.
Et toute suite de Cauchy ds $(\mathbb{K}^n, \| \|_\infty)$ est bornée donc, par B-W, admet une sous-suite convergente, donc converge.

2) Espaces de suites

Rappel $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_p < +\infty \}$ où $\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$ si $p < +\infty$

$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

Prop $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un espace de Banach.

On a déjà admis que ℓ^p était un EVN. Reste à montrer la complétude. On peut $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ idem.

Preuve Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^p

Attention ! Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle tq $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^{(k)}|^p < +\infty$

Cas $p<+\infty$ a) Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, la suite réelle $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon>0$. $\exists K\in\mathbb{N}$ tq $\forall k,\ell \geq K$ $\|x^{(k)} - x^{(\ell)}\|_p < \varepsilon$

$$\|x^{(k)} - x^{(\ell)}\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(\ell)}|^p\right)^{1/p}$$

somme de termes positifs !

En particulier, pour chaque $n\in\mathbb{N}$, $|x_n^{(k)} - x_n^{(\ell)}|^{(p)} < \varepsilon^{(p)}$, ce qui montre bien le caractère lipschitz souhaité. Cette suite cv donc (dans $\mathbb{R}$) vers un réel x_n^∞. On note $x^\infty = (x_n^\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle ainsi obtenue.

b) $x^\infty \in \ell^p$. Pour cela il suffit de montrer que $x^{(k)} - x^\infty \in \ell^p$ pour un certain k (ℓ^p est un ev !)

Soit $\varepsilon>0$. $\exists K\in\mathbb{N}$ tq $\forall k,\ell\geq K$, $\|x^{(k)} - x^{(\ell)}\|_p < \varepsilon$, ie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(\ell)}|^p < \varepsilon^p.$$

En particulier, pour tt $N\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} |x_n^{(k)} - x_n^{(\ell)}|^p < \varepsilon^p$

Pour un tel N, on a une somme finie, donc on peut passer à la limite qd $\ell\to+\infty$ ce qui donne $\sum_{n=0}^{N} |x_n^{(k)} - x_n^\infty|^p < \varepsilon^p$ $(*)$

Donc la série à termes positifs $\sum_n |x_n^{(k)} - x_n^\infty|^p$ est convergente donc $x^{(k)} - x^\infty \in \ell^p$ ce qu'on voulait. Et par passage à la limite dans $(*)$ qd $N\to+\infty$ on obtient $\|x^{(k)} - x^\infty\|_p \leq \varepsilon$ $\forall k\geq K$ ce qui montre au passage :

c) $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ cv vers x^∞ dans ℓ^p,

et conclut donc la preuve de la complétude. $\square$

Question : pourquoi ça ne marche pas pour L^p ?

Cas $p=+\infty$ a) A nouveau, si $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans ℓ^∞, chaque $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc convergente et on note x_n^∞ sa limite et $x^\infty = (x_n^\infty)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, on a $\sup_{l \geq k} \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty \to 0$ car $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\| \|_\infty$

or $\sup_{l \geq k} \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty = \sup_{l \geq k} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| \right)$ à vérifier !

$$\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\underbrace{\sup_{l \geq k} |x_n^{(k)} - x_n^{(l)}|}_{\geq \, |x_n^{(k)} - x_n^\infty|} \Big)$$

$|x_n^{(k)} - x_n^\infty|$ par passage à la limite (dans $\mathbb{R}$!) qd $l \to +\infty$

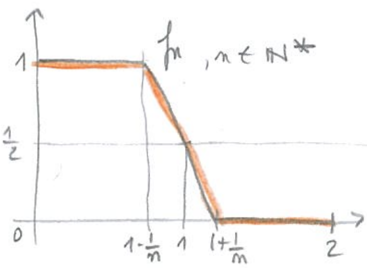
$\geq \|x^{(k)} - x^\infty\|_\infty$, qui est en particulier fini, donc $x^\infty \in l^\infty$, et qui tend vers 0, donc $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ cv vers x^∞ dans l^∞. □

Exercice $\forall$ $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, vérifier que $l^p \subset l^q$ et que $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ $\forall x \in l^p$.

3) Espaces de fonctions (continues)

On a déjà vu que pour $a < b \in \mathbb{R}$, $(\underset{E}{C([a,b], \mathbb{K})}, \| \|_\infty)$ était un EVN complet, donc un espace de Banach, et qu'en revanche, $(C([a,b], \mathbb{R}), \| \|_p)$ n'était pas complet. (chap2, p. II 21-22)

(Résolution de l'exo correspondant : on considère la suite



$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, $n \leq m$, $\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^2 |f_n(t) - f_m(t)|\, dt$

$$\leq \int_{1-\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} \underbrace{|f_n(t) - f_m(t)|}_{\leq 1} dt \leq \frac{2}{n}$$

(f_n et f_m coïncident en dehors de cet intervalle

donc $(f_n)_n$ est de Cauchy pour $\| \|_1$ (et donc pour $\| \|_p$ d'après l'exo précédent)

Supposons que (f_n) cv vers $f \in E$ pour $\| \|_p$, ie que $\int_0^2 |f_n(t) - f(t)|^p dt \to 0$

Alors $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^p dt \to 0$

$\geq \int_0^{1-\frac{1}{n}} |1 - f(t)|^p dt$; ceci est donc une suite croissante qui tend vers 0 → identiquement nulle. Et comme $|1-f|^p$ est C^0 et ≥ 0 sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$, cela entraîne $|1-f|^p \equiv 0$ sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$ $\forall n$, donc $f = 1$ sur $[0,1)$

De même $f = 0$ sur $(1,2]$. Impossible ! Donc (f_n) ne cv pas dans $(E, \| \|_p)$ □)

Pour obtenir un espace complet, il faut introduire de l'espace C^0 ... intégrale de Lebesgue

La complétude de $(C([a,b],\mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$ se généralise de la façon suivante :

Thm • Soient (X,τ) un et et (E,d) un e.m complet. Soit $\mathcal{C}_b(X,E)$ l'ensemble des fonctions continues bornées de (X,τ) dans (E,d), muni de la distance (exercice) $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$. Alors $(\mathcal{C}_b(X,E), d_\infty)$ est un espace métrique complet. $(\mathcal{B}(X,E), d_\infty)$ (fonctions slt bornées) aussi.

• Notamment, si (X,τ) est compact, toutes les fct° continues sont bornées donc on obtient que $(\mathcal{C}(X,E), d_\infty)$ est un e m complet.

• Si $(E,d) = (E,\|\ \|)$, ie si E est un Banach, alors d_∞ ci-dessus est associée à une norme (exercice) sur $\mathcal{C}_b(X,E)$: $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$

et l'EVN (exercice) $(\mathcal{C}_b(X,E), \|\ \|_\infty)$ est alors un espace de Banach.

(et encore une fois si (X,τ) est compact on pourra enlever le "b" de "borné")

4) Espaces d'applications linéaires continues

Cas de la dim finie : si $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\ \|_F)$ sont des $\mathbb{K}$EVN de dimension finie, $\mathcal{L}(E,F)$ (qui sont toutes l'espace vectoriel des application linéaires de E dans F, continues) est un e.v de dimension finie (si $\dim E = n$ et $\dim F = m$, il est isomorphe, via un choix de bases de E et F, à $M_{m\times n}(\mathbb{K})$), donc muni de n'importe quelle norme (elles sont toutes équivalentes) $\|\cdot\|$, $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

On considère maintenant le cas général mais on se restreint aux applications linéaires continues, dont on note l'espace (vectoriel) $\mathcal{L}_c(E,F)$. On a vu que alors

$$|||f||| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E\le 1}} \|f(x)\|_F = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}, \text{ pour } f\in\mathcal{L}_c(E,F), \text{ définissait}$$

une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ (subordonnée à $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$)

Proposition : Si $(F,\|\ \|_F)$ est un Banach, alors $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\ |||)$ est un Banach.

Preuve On va appliquer le résultat du § précédent sur les applications continues.

Mais ⚠ Les applications linéaires non continues ne sont en général pas bornées, mais elles le sont sur $\overline{B}_E(0,1)$!

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}_c(E,F), |||.|||)$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n,m\geq N,\ |||f_n-f_m|||<\varepsilon$, ie $\sup_{x\in\overline{B}_E(0,1)} \|f_n(x)-f_m(x)\|_F<\varepsilon$

en d'autres termes $\|f_n|_{\overline{B}} - f_m|_{\overline{B}}\|_\infty<\varepsilon$ où ici $\|\ \|_\infty$ désigne la norme uniforme sur l'espace des fonctions continues bornées de $\overline{B}_E$ dans F : $\mathcal{C}=\mathcal{C}_b((\overline{B}_E,\|\ \|_E),(F,\|.\|_F))$. $(f_n|_{\overline{B}_E})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy de cet espace, qui est complet pour $\|\ \|_\infty$ d'après le § précédent, donc elle converge vers $f\in\mathcal{C}$.

On étend f à E en posant, $\forall x\in E\setminus\{0\}$, $f(x)=\|x\|\, f\Big(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\in\overline{B}_E}\Big)$

<u>Affirmation 1</u> $f\in\mathcal{L}_c(E,F)$ (exercice)

<u>Affirmation 2</u> $|||f_n-f|||\to 0$ Ceci est immédiat puisque $|||f_n-f|||=\|f_n|_{\overline{B}_E}-f|_{\overline{B}_E}\|_\infty$ qui tend vers 0 par def de f.

Ce qui conclut $\square$

<u>Rq</u> Une autre façon de dire les choses est que $\{f|_{\overline{B}_E},\ f\in\mathcal{L}_c(E,F)\}=A$ est un sous ensemble fermé de $(\mathcal{C}_b(E,F),\|\ \|_\infty)$ (c'est plus ou moins l'affirmation 1), qui est complet, donc le 1er est complet, mais celui-ci est isométrique à $(\mathcal{L}_c(E,F),|||.|||)$. En effet, l'applicat° :

$$\varphi : (\mathcal{L}_c(E,F), |||.|||) \longrightarrow (\mathcal{C}_b(\overline{B}_E, F), \|\ \|_\infty) \quad \text{est un } \underline{\text{plongement}}$$
$$f \longmapsto f|_{\overline{B}_E}$$

<u>isométrique</u> d'image A.

($\hookrightarrow$ une appli satisfaisant $\|\varphi(f)-\varphi(g)\|_\infty=|||f-g|||$)

On s'intéresse particulièrement au cas où $(E,\|\ \|_E)=(F,\|\ \|_F)$ et à l'ensemble des <u>endomorphismes</u> continus de E, $\mathcal{L}_c(E):=\mathcal{L}_c(E,E)$, muni de la norme $|||.|||$

Alors :

<u>Prop</u> Si $(E,\|\ \|_E)$ est un Banach, $(\mathcal{L}_c(E),|||.|||)$ est une algèbre de Banach unitaire

(on ne va pas donner la def, on va lister les propriétés de $\mathcal{L}_c(E)$ qui en font un tel espace)

Prop (suite) $\mathcal{L}_c(E)$ est muni de deux loi de composition interne ($+$ et $\circ$) et d'une action de $\mathbb{K}$ (notée "$\cdot$") telles que

algèbre associative unitaire
- (i) $(\mathcal{L}_c(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ev
- (ii) ~~La~~ composition $\circ$: $\mathcal{L}_c(E) \times \mathcal{L}_c(E) \to \mathcal{L}_c(E)$, $(f, g) \mapsto f \circ g$ est bilinéaire, associative, et munie d'un élément neutre id_E (en particulier $(\mathcal{L}_c(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire)

En outre, $\mathcal{L}_c(E)$ est muni d'une norme $|||\cdot|||$ telle que
- (iii) $(\mathcal{L}_c(E), |||\cdot|||)$ est un espace de Banach
- (iv) $\forall f, g \in \mathcal{L}_c(E)$ $|||f \circ g||| \leq |||f||| \times |||g|||$

Exo: vérifier (ii). Le reste a déjà été fait.

Rq (i)+(ii)+(iv) fait de $(\mathcal{L}_c(E), +, \circ, \cdot, |||\cdot|||)$ une algèbre normée. (que $(E, \|\ \|_E)$ soit un Banach ou non)

Dans la suite, on notera souvent A, B des élts de $\mathcal{L}_c(E)$ et AB leur composée, par analogie avec les matrices, qui sont le principal exemple à avoir en tête.

B) Séries dans les espaces de Banach

On utilise les mêmes notations que dans $\mathbb{K}$: si $(E, \|\ \|)$ est un EVN et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ la "série" $\sum_k x_k$ désigne la suite des sommes partielles $\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{m} x_k}_{\in E}\right)_{m \in \mathbb{N}}$. ($\in E$ bien défini car E est un $\mathbb{K}$ev)

On dit que la série $\sum_k x_k$ converge si la suite ci-dessus converge et on note alors $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ $(\in E)$ sa limite. On a par contre une nouvelle définition :

Def | On dit que la série $\sum_k x_k$ converge normalement si la série numérique $\sum_k \|x_k\|$ CV

Nous avez déjà vu la convergence normale notamment pour les séries de fonctions continues : si $(E, \|\ \|) = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$, on retrouve cette notion de CV normale déjà étudiée. Et nous avez vu que la CV normale d'une série de fct° $\Rightarrow$ la CV uniforme, ie la CV dans $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. Eh bien c'est un fait général dans les Banach (ce qui est bien le cas de l'espace ci-dessus). Et au fait, cas particulier encore + simple : $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. La CVN équivaut alors à la CVAbs

Proposition Si $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et si $\sum_k x_k$ est une série normalement convergente dans E, alors $\sum_k x_k$ est convergente. Mieux : pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, $\sum_k x_{\sigma(k)}$ est également convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \sum_{k=0}^{+\infty} x_{\sigma(k)}$

⚠ L'addition a beau être commutative, quand on fait une somme infinie en général on ne peut pas intervertir les termes ! La somme peut en être changée !

ex. dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Vu l'énoncé ci-dessus il nous faut chercher un contre exemple parmi les séries semi-convergentes, typiquement $\sum \frac{(-1)^k}{k+1}$

(classique) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$ $\left(\text{et } \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k+1}\right| = +\infty \right)$

Eh bien on peut mq $\forall \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\exists\, \sigma$ permutation de $\mathbb{N}$ tq

$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$! (Il y a un thm général pour ça, le thm de réarrangement de Riemann)

Rq Comme dans $\mathbb{R}$, si $\sum_k x_k$ cv, alors $\|x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

En effet, $\|x_n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k \right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \to \sum_{k=0}^{+\infty} x_k, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} x_k \to \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

la prop ci-dessus nous dit que : si $\|x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ assez vite pour que $\sum_{k=0} \|x_k\| < +\infty$, alors $\sum_k x_k$ cv.

Preuve de la proposition Commençons par montrer la cv de $\sum_k x_k$. Pour cela, comme $(E, \|.\|)$ est complet, il suffit de mq cette suite est de Cauchy (celle des sommes partielles !). Or

$$\forall m \leq n \in \mathbb{N}, \quad \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{m} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|$$

$$= \Big| \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \|x_k\|}_{= S_n} - \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \|x_k\|}_{= S_m} \Big|$$

Or $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv donc est de Cauchy donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall N \leq m \leq n$, $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$, ce qui conclut.

Soit maintenant σ une permutation de $\mathbb{N}$, Soit $\varepsilon > 0$. $\sum x_k$ CVN donc pour $n \in \mathbb{N}$ assez gd, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|x_k\| < \varepsilon$ IV 8

Pour un tel n, prenons N tq $\{0, \dots, n\} \subset \sigma(\{0, \dots, N\})$ (σ est surjective !)

Alors pour tout $m \geq n$,

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} x_k - \sum_{k=0}^{N} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{\substack{k \in [\![n+1, m]\!] \\ \cap \\ [\![n+1, +\infty[\![}} x_k - \sum_{\substack{j \in \sigma(\{0,\dots,N\}) \setminus \{1,\dots,n\} \\ \cap \\ [\![n+1, +\infty[\![}} x_j \right\|$$

$$\leq 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|x_k\| < 2\varepsilon$$

donc par passage à la limite qd $m \to +\infty$, $\left\| \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} x_k}_{S} - \sum_{k=0}^{N} x_{\sigma(k)} \right\| < 2\varepsilon$

pour tout N assez grand, ce qui donne bien la convergence de $\sum_k x_{\sigma(k)}$ vers S □

• __Application 1__ Soit $(E, \|\|)$ un espace de Banach.

__Déf__ On dit que $A \in \mathcal{L}_c(E)$ est __inversible__ s'il existe __$B \in \mathcal{L}_c(E)$__ tq $AB = BA = id_E$

__Rq__ En fait $B : E \to E$ suffit, autrement dit il suffit que A soit bijective, et son inverse sera automatiquement linéaire (exo) et __continue__. Cela se montre par le thm de l'application ouverte que vous verrez sans-doute en calcul diff au 2nd semestre.

On note $GL_c(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}_c(E)$. On va montrer que c'est un ouvert et que l'appli $\begin{array}{ccc} GL_c(E) & \to & GL_c(E) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}$ est C^0.

__Rq__ a) pour $(E, \|.\|) = (\mathbb{R}, |.|)$, $\mathcal{L}_c(E)$ s'identifie à $\mathbb{R}$ et $GL_c(E)$ à $\mathbb{R}^*$, et on est juste en train de dire que $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et que $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est continue.

b) si E est de dim finie n, $\mathcal{L}_c(E) \simeq M_n(\mathbb{R})$, $GL_c(E) \simeq GL_n(\mathbb{R})$, et on a un moyen bien pratique de montrer les résultats ci-dessus : le __déterminant__ $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. On a déjà vu (je crois) que celui-ci était continu. Or $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}^*}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}})$, donc ouvert de $M_n(\mathbb{R})$, et

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{com}(A)$, donc les composantes de cette application sont __rationnelles__ en les coeff de A, donc cette applicat° est C^0.

En dimension infinie, on n'a pas ça, mais on a les séries :

Prop : Soit $(E, \| \|)$ un Banach.
Si $A \in \mathcal{L}_c(E)$ vérifie $|||A||| < 1$, alors $(id_E - A)$ est inversible et

$$(id_E - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$$

(Rappelle le DSE de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, et ce n'est pas étonnant)

Preuve tout d'abord, comme $|||A^n||| \leq |||A|||^n$ et que $|||A|||<1$,

$\sum_n |||A|||^n$ cv et donc par comparaison de séries à termes positifs

$\sum_n |||A^n|||$ aussi, ce qui signifie que $\sum_n A^n$ cvN dans $(\mathcal{L}_c(E), ||| \, |||)$

qui est un espace de Banach, donc cette série converge, ce qui donne du sens à la somme de la dernière ligne.

Maintenant, $(id_E - A) \circ \left(\sum_{k=0}^{m} A^k\right) = id_E \circ \sum_{k=0}^{m} A^k - A \circ \sum_{k=0}^{m} A^k$

$$= id_E - A^{m+1} \quad (*)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{m} A^k\right) \circ (id_E - A)$$

$(*) \to id_E$ qd $m \to +\infty$.

Pour les autres membres, il faut pouvoir dire que si $B, C \in \mathcal{L}_c(E)$ et $C_n \to C$ alors $B \circ C_n \to B \circ C$ et $C_n \circ B \to C \circ B$. Cela découle des propriété des algèbres de Banach mais il y a qqc à dire !

En tt cas, cela entraine bien que $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k \, (\in \mathcal{L}_c(E))$ est l'inverse de $id_E - A$. □

Corollaire $GL_c(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(E)$ et $\begin{array}{ccc} GL_c(E) & \longrightarrow & GL_c(E) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$ est continue

Dem La prop précédente montre $B(id_E, 1) \subset GL_c(E)$ donc que id_E est intérieur à $GL_c(E)$. Mais si maintenant $M \in GL_c(E)$ et si $H \in \mathcal{L}_c(E)$ satisfait $|||M^{-1}H|||<$ 1

(notamment si $|||H||| < \frac{1}{|||M^{-1}|||}$ par la propriété de la norme d'op.)

$M + H = M(id_E - \underbrace{(-M^{-1}H)}_{A})$ avec $|||A||| < 1$ donc

$M + H \in GL_c(E)$ car celui-ci, muni de $\circ$, est un groupe (classique).

Donc $B(M, \frac{1}{|||M^{-1}|||}) \subset GL_c(E)$, qui est donc un ouvert.

En outre, $(M+H)^{-1} = \left(M(id_E + M^{-1}H)\right)^{-1} = (id_E + M^{-1}H)^{-1} \circ M^{-1}$ (⚠ au changement d'ordre)

$$= \left[\sum_{k=0}^{+\infty} (-M^{-1}H)^k\right] \circ M^{-1} \quad (1^{er} \text{ terme} = M^{-1})$$

Donc $|||M^{-1} - (M+H)^{-1}||| = |||\sum_{k=1}^{+\infty} (-M^{-1}H)^k M^{-1}||| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |||M^{-1}|||^{k+1} |||H|||^k$

Donc si $|||H||| < \delta < \frac{1}{|||M^{-1}|||}$ $\quad$ " $\leqslant |||M^{-1}||| \times \frac{\delta |||M^{-1}|||}{1-\delta |||M^{-1}|||} \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $|||H||| < \delta \Rightarrow |||M^{-1} - (M+H)^{-1}||| < \varepsilon$

Ce qui donne la continuité en M. $\square$

Rq ds $\mathbb{R}$, on a un thm pour dire que $\underset{(H)}{x} \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \underset{(H)}{f_k(x)}$ est continue

(si chacune des f_k est continue et que la série converge normalement par exemple)

Ici on pourrait énoncer le m̄ type de résultat.

- Application 2 Exponentielle de matrice (plus généralement d'endomorphisme)

Avant de nous lancer dedans : Pourquoi définir ça ??

Eh bien dans $\mathbb{R}$, c'est simple : exp est l'unique solut° de l'ED $y' = y$, valant 1 en 0, l'ED la plus bête et elle intervient dans plein d'autres pb du m̄ type. Plus généralement la solution de $\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = c \end{cases}$ est $x \mapsto c\exp(ax)$

Maintenant si on considère l'analogue en dimension n, on étudie une ED linéaire $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = C \end{cases}$, où l'inconnue est ici une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$. Eh bien la solution s'exprime en fonction de A de la façon suivante : $Y(t) = \underbrace{\exp(tA)}_{\in M_n(\mathbb{R})} . C$, et l'étude de $t \mapsto \exp(tA)$ permet de décrire le comportement des solutions en fonction de la condition initiale C. Pour + de choses sur la questions, cf second semestre.

On se place à nouveau dans l'algèbre de Banach $(\mathcal{L}_c(E), |||\ |||)$, où $(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach.

Déf / Prop : Pour tout $A \in \mathcal{L}_c(E)$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{n!}$ converge dans $(\mathcal{L}_c(E), |||\ |||)$ et on définit $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\left|\left| \frac{A^n}{n!} \right|\right|\right| \leq \frac{|||A|||^n}{n!}$, terme général d'une série (réelle) convergente (vers $\exp(|||A|||)$) donc par comparaison, $\sum \left|\left|\left|\frac{A^n}{n!}\right|\right|\right|$ cv, ie $\sum \frac{A^n}{n!}$ CVN, donc CV
réelle
puisqu'on est dans un espace de Banach. Au passage, par inégalité triangulaire et passage à la limite, $|||\exp(A)||| \leq e^{|||A|||}$

Prop : L'application $\begin{array}{rcl}\mathcal{L}_c(E) & \to & \mathcal{L}_c(E) \\ A & \mapsto & \exp(A)\end{array}$ est continue. En effet,

$\forall A, B \in \mathcal{L}_c(E)$, $|||\exp(A) - \exp(B)||| \leq |||A-B|||\, e^{\max(|||A|||, |||B|||)}$

Dém : Notons $M = \max(|||A|||, |||B|||)$. On remarque que :

$$A^n - B^n = \underbrace{A^n - BA^{n-1}} + \underbrace{BA^{n-1} - B^2A^{n-2}} + B^2A^{n-2} \cdots\cdots + B^{n-1}A - B^n$$

$$= (A-B)A^{n-1} + B(A-B)A^{n-2} + \ldots + B^{n-1}(A-B)$$

(⚠ On ne peut pas écrire $(a^n - b^n) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k\right)$ qui ne marche que dans un anneau commutatif)

Donc $|||A^n - B^n||| \leq |||A-B||| \underbrace{\left(|||A|||^{n-1} + |||B|||\cdot|||A|||^{n-2} + \ldots + |||B|||^{n-1}\right)}_{\leq n M^{n-1}}$

Donc (ttes les séries ci dessous convergent)

$$|||\exp(A) - \exp(B)||| = \left|\left|\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n - B^n}{n!} \right|\right|\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overbrace{|||A^n - B^n|||}^{0 \text{ pour } n=0}}{n!} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n M^{n-1}}{n!}\right) |||A-B|||$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n M^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} = e^M = e^{\max(|||A|||, |||B|||)},$$

ce qu'on voulait

Cela montre que l'application $\exp : \mathcal{L}_c(E) \to \mathcal{L}_c(E)$ est localement lipschitzienne : $\forall A \in \mathcal{L}_c(E)$, $\exists V$ vois de A tq $\exp_{|V}$ soit lipschitzienne (car sur une boule ouverte contenant A, $|||\ |||$ est bornée donc e^M ci dessus est majoré)

Cette propriété (comme le caractère globalement lipschitzien) entraîne la continuité □

Là encore, on aurait pu utiliser un résultat général sur les séries de fonctions à valeurs dans un Banach (ici c'est même une série entière). Quel pourrait être l'énoncé correspondant ? En vous inspirant des séries de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, sauriez-vous prouver cette généralisation ?.

Proposition Si A et $B \in \mathcal{L}_c(E)$ vérifient $AB = BA$, alors

$$\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$$

⚠ Ne pas oublier la condition de commutativité.

Preuve $\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(A+B)^k}{k!}$

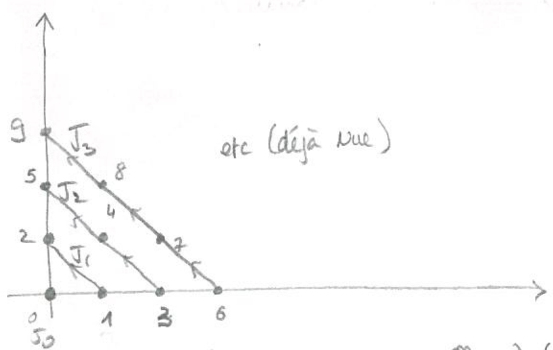
Or $\frac{(A+B)^k}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{p+q=k} \binom{p}{k} A^p B^q$ car A et B commutent.

$$= \sum_{p+q=k} \frac{A^p}{p!} \frac{B^q}{q!}$$

Donc $\boxed{\exp(A+B)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} \frac{A^p}{p!} \frac{B^q}{q!}$ (*)

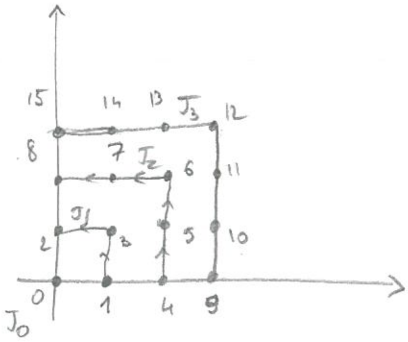
Mais la famille (dénombrable) $\Big(\overbrace{\frac{A^p}{p!} \frac{B^q}{q!}}^{u_{p,q}}\Big)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \mathcal{F}$ est sommable (**) dans $(\mathcal{L}_c(E), |||\,|||)$, (cela signifie que $\left\{ \sum_{(p,q)\in J} |||u_{p,q}||| \;\middle|\; J \text{ ss ens fini de } \mathbb{N}^2 \right\}$ est majoré) et cela entraîne (cf thm antérieur) que pour tte exhaustion de $\mathbb{N}^2$ par des parties finies emboîtées $J_0 \subset J_1 \subset \dots \subset J_n \subset J_{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{(p,q)\in J_n} u_{p,q}$ existe et qu'elle-ci ne dépend pas de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$!

La somme (*) correspond à l'exhaustion :



etc (déjà vue)

Mais on peut aussi faire celle-ci :



qui correspond à $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{0\le k,l\le n} u_{k,l} \right) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{n} \frac{B^l}{l!} \right)$

$= \boxed{\exp(A)\exp(B)}$ $\quad (f,g) \mapsto f\circ g$ est C^0, ce qui conclut. □

(**) car on est ramené à la sommabilité (ds $\mathbb{R}$) de $\sum_{p,q} \frac{|||A|||^p\, |||B|||^q}{p!\, q!}$ et ça vous avez dû le voir ?

Vu que $\exp(0_{\mathcal{L}_c(E)}) = id_E$, on a :

Corollaire : $\forall A \in \mathcal{L}_c(E)$, $\exp(A)$ est inversible et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$

Dans le cas de la dimension finie, on considère $E = \mathbb{K}^N$ muni d'une norme quelconque et on identifie $\mathcal{L}_c(E)$ à $M_n(\mathbb{K})$

$\boxed{\textbf{Proposition} \quad \text{Si } A \in M_n(\mathbb{K}), \text{ alors } \det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))}$

Preuve : Spdg opsq $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (on peut tjs considérer une matrice réelle comme une matrice complexe particulière !)
Si $A \in M_N(\mathbb{C})$, $\exists\, S \in Gl_N(\mathbb{C})$ et T triangulaire sup tq $A = S^{-1}TS$ (car le polynôme caract. de A est scindé sur $\mathbb{C}$).

Lemme (à retenir) $A = S^{-1}TS \Rightarrow \exp(A) = S^{-1}\exp(T)S$

En effet, $\exp(A) = \exp(S^{-1}TS) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(S^{-1}TS)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} S^{-1}\left(\frac{T^k}{k!}\right)S = S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{T^k}{k!}\right)S$

$\Big(\overbrace{(S^{-1}T\underbrace{S)(S^{-1}}_{id}T\underbrace{S)\dots(S^{-1}}_{id}\underbrace{TS)}_{id}}^{k \text{ fois}} = S^{-1}T^kS\Big)$

(En passant par les sommes partielles et en utilisant la continuité de l'application $M \longmapsto S^{-1}MS$ sur $M_n(\mathbb{R})$)

donc $\det(\exp(A)) = \det(\exp(T))$
(invariance du det par conjugaison)
Mais $\mathrm{Tr}(T) = \mathrm{Tr}(A)$ (idem) donc il suffit de se restreindre au cas des matrices triangulaires.

Or si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$, $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & *' \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N^k \end{pmatrix}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, donc

$\exp(A) = \begin{pmatrix} \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda_1^k}{k!}\right) & & *'' \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda_N^k}{k!}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & *'' \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_N} \end{pmatrix}$, dont le det est $e^{\lambda_1} \times \dots \times e^{\lambda_N}$
$= e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_N)}$
$= e^{\mathrm{Tr}(A)}$, CQFD $\square$

(Cette formule explique notamment pourquoi la "divergence" d'un champ de vecteurs est ce qu'elle est

$\text{''} \; \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)(p) = \mathrm{Tr}(DX_p)$

$= \ln\big(\det(\underbrace{\exp(DX_p)}_{\text{détermine le comportement local des solutions}})\big)$

développement EDO

$\mathrm{div}(X)_p < 0 \Leftrightarrow \det(\exp) < 1$
$\Leftrightarrow$ le champ est "contractant" "converge"

$\mathrm{div}(X)_p > 0 \Leftrightarrow \det(\exp) > 1$
$\Leftrightarrow$ le chp est "dilatant" "diverge")