En dimension infinie, on n'a pas ça, mais on a les séries :

Prop : Soit $(E, \| \|)$ un Banach.

Si $A \in \mathcal{L}_c(E)$ vérifie $|||A||| < 1$, alors $(id_E - A)$ est inversible et

$$(id_E - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$$

(Rappelle le DSE de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, et ce n'est pas étonnant)

Preuve tout d'abord, comme $|||A^n||| \leq |||A|||^n$ et que $|||A|||<1$,

$\sum_n |||A|||^n$ cv et donc par comparaison de séries à termes positifs

$\sum_n |||A^n|||$ aussi, ce qui signifie que $\sum_n A^n$ cvN dans $(\mathcal{L}_c(E), ||| \, |||)$

qui est un espace de Banach, donc cette série converge, ce qui donne du sens à la somme de la dernière ligne.

Maintenant, $\left(id_E - A\right)\circ\left(\sum_{k=0}^{+m} A^k\right) = id_E \circ \sum_{k=0}^{m} A^k - A \circ \sum_{k=0}^{m} A^k$

$$= id_E - A^{m+1} \quad (*)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{m} A^k\right)\circ\left(id_E - A\right)$$

$(*) \to id_E$ qd $m \to +\infty$.

Pour les autres membres, il faut pouvoir dire que si $B, C \in \mathcal{L}_c(E)$ et $C_n \to C$ alors $B \circ C_n \to B \circ C$ et $C_n \circ B \to C \circ B$. Cela découle des propriété des algèbres de Banach mais il y a qqc à dire !

En tt cas, cela entraîne bien que $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k \; (\in \mathcal{L}_c(E))$ est l'inverse de $id_E - A$. □

Corollaire $Gl_c(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(E)$ et $\begin{array}{ccc} Gl_c(E) & \longrightarrow & Gl_c(E) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$ est continue

Dem La prop précédente montre que $B(id_E, 1) \subset Gl_c(E)$ donc que id_E est intérieur à $Gl_c(E)$. Mais si maintenant $M \in Gl_c(E)$ et si $H \in \mathcal{L}_c(E)$ satisfait $|||M^{-1}H|||<1$ (notamment si $|||H|||< \frac{1}{|||M^{-1}|||}$ par la propriété de la norme d'op)

alors $M + H = M\left(id_E - \underbrace{(-M^{-1}H)}_{A}\right)$ avec $|||A|||<1$ donc

d'après la prop préc, $M+H \in Gl_c(E)$ car celui-ci, muni de $\circ$, est un groupe (classique).

Donc $B(M, \frac{1}{|||M^{-1}|||}) \subset Gl_c(E)$, qui est donc un ouvert.

En outre, $(M+H)^{-1} = \left(M(id_E + M^{-1}H)\right)^{-1} = (id_E + M^{-1}H)^{-1} \circ M^{-1}$ (⚠ au changement d'ordre)

$$= \left[\sum_{k=0}^{+\infty} (-M^{-1}H)^k\right] \circ M^{-1} \qquad (1^{er} \text{ terme} = M^{-1})$$

Donc $|||M^{-1} - (M+H)^{-1}||| = |||\sum_{k=1}^{+\infty} (-M^{-1}H)^k M^{-1}||| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |||M^{-1}|||^{k+1} |||H|||^k$

Donc si $|||H||| < \delta < \frac{1}{|||M^{-1}|||}$ " $\leqslant |||M^{-1}||| \times \frac{\delta |||M^{-1}|||}{1 - \delta |||M^{-1}|||} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $|||H||| < \delta \Rightarrow |||M^{-1} - (M+H)^{-1}||| < \varepsilon$

Ce qui donne la continuité en M. □

Rq ds $\mathbb{R}$, on a un thm pour dire que $\underset{(H)}{x} \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \underset{(H)}{f_k(x)}$ est continue

(si chacune des f_k est continue et que la série converge normalement par exemple)

Ici on pourrait énoncer le m̃ type de résultat.

- Application 2 Exponentielle de matrice (plus généralement d'endomorphisme)

Avant de nous lancer dedans : Pourquoi définir ça ??

Eh bien dans $\mathbb{R}$, c'est simple : exp est l'unique solut° de l'ED $y' = y$, valant 1 en 0 l'ED la plus kéké ! et elle intervient dans plein d'autres pb du m̃ type. Plus généralement la solution de $\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = c \end{cases}$ est $x \mapsto c\exp(ax)$

Maintenant si on considère l'analogue en dimension n, on étudie une ED linéaire $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = C \end{cases}$, où l'inconnue est ici une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{R}^n$. Eh bien la solution s'exprime en fonction de A de la façon suivante : $Y(t) = \underbrace{\exp(tA)}_{\in M_n(\mathbb{R})} . C$, et l'étude de $t \mapsto \exp(tA)$ permet de décrire le comportement des solutions en fonction de la condition initiale C. Pour + de choses sur la question, cf second semestre.

On se place à nouveau dans l'algèbre de Banach $(\mathcal{L}_c(E), |||\ |||)$, où $(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach

Def / Prop Pour tout $A \in \mathcal{L}_c(E)$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{n!}$ converge dans $(\mathcal{L}_c(E), |||\ |||)$ et on définit $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$

Preuve $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\left|\left| \frac{A^n}{n!} \right|\right|\right| \leq \frac{|||A|||^n}{n!}$, terme général d'une série (réelle) convergente (vers $\exp(|||A|||)$ ← réelle) donc par comparaison, $\sum |||\frac{A^n}{n!}|||$ cv, ie $\sum \frac{A^n}{n!}$ CVN, donc CV puisqu'on est dans un espace de Banach. Au passage, par inégalité triangulaire et passage à la limite, $|||\exp(A)||| \leq e^{|||A|||}$

Prop : L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_c(E) & \to & \mathcal{L}_c(E) \\ A & \mapsto & \exp(A) \end{array}$ est continue. En effet,

$\forall A, B \in \mathcal{L}_c(E)$, $|||\exp(A) - \exp(B)||| \leq |||A - B|||\, e^{\max(|||A|||, |||B|||)}$

Dem Notons $M = \max(|||A|||, |||B|||)$. On remarque que :

$$A^n - B^n = \underbrace{A^n - BA^{n-1}} + \overbrace{BA^{n-1}} - \underbrace{B^2A^{n-2}} + B^2A^{n-2} \ldots\ldots + B^{n-1}A - B^n$$

$$= (A-B)A^{n-1} + B(A-B)A^{n-2} + \ldots + B^{n-1}(A-B)$$

(⚠ On ne peut pas écrire $(a^n - b^n) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k\right)$ qui ne marche que dans un anneau commutatif)

Donc $|||A^n - B^n||| \leq |||A - B|||\, \underbrace{\left(|||A|||^{n-1} + |||B|||\cdot|||A|||^{n-2} + \ldots + |||B|||^{n-1} \right)}_{\leq n M^{n-1}}$

Donc (ttes les séries ci dessous convergent)

$$|||\exp(A) - \exp(B)||| = \left|\left|\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n - B^n}{n!} \right|\right|\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overbrace{|||A^n - B^n|||}^{0 \text{ pour } n=0}}{n!} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n M^{n-1}}{n!} \right) |||A - B|||$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n M^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} = e^M = e^{\max(|||A|||, |||B|||)}$$

ce qu'on voulait

Cela montre que l'application $\exp : \mathcal{L}_c(E) \to \mathcal{L}_c(E)$ est localement lipschitzienne : $\forall A \in \mathcal{L}_c(E)$, $\exists V$ voisinage de A tq $\exp_{|V}$ soit lipschitzienne (car sur une boule ouverte contenant A, $|||\ |||$ est bornée donc e^M ci dessus est majoré)

Cette propriété (comme le caractère globalement lipschitzien) entraîne la continuité

□

Là encore, on aurait pu utiliser un résultat général sur les séries de fonctions à valeurs dans un Banach (ici c'est même une série entière). Quel pourrait être l'énoncé correspondant ? En vous inspirant des séries de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, sauriez-vous prouver cette généralisation ?.

Proposition Si A et $B \in \mathcal{L}_c(E)$ vérifient $AB = BA$, alors

$$\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$$

⚠ Ne pas oublier la condition de commutativité.

Preuve $\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(A+B)^k}{k!}$.

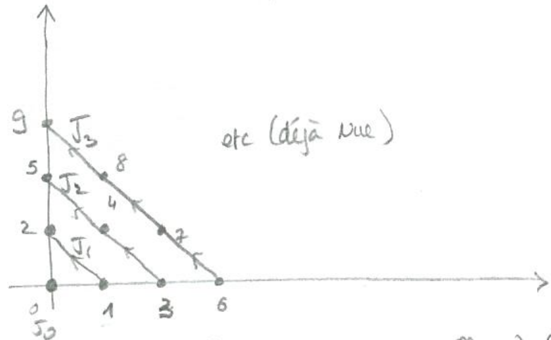
Or $\frac{(A+B)^k}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{p+q=k} \binom{p}{k} A^p B^q$ car A et B commutent.

$$= \sum_{p+q=k} \frac{A^p}{p!} \frac{B^q}{q!}$$

Donc $\boxed{\exp(A+B)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} \frac{A^p}{p!}\frac{B^q}{q!}$ (*)

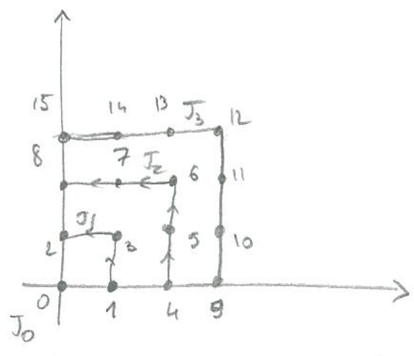
Mais la famille (dénombrable) $\left(\overbrace{\frac{A^p}{p!}\frac{B^q}{q!}}^{"u_{p,q}"}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \mathcal{F}$ est sommable (**) dans $\left(\mathcal{L}_c(E), |||\ |||\right)$, (cela signifie que $\left\{ \sum_{(p,q)\in J} |||u_{p,q}||| \mid J \text{ ss ens. fini de } \mathbb{N}^2 \right\}$ est majoré) et cela entraîne (cf thm antérieur) que pour tte exhaustion de $\mathbb{N}^2$ par des parties finies emboîtées $J_0 \subset J_1 \subset \dots \subset J_n \subset J_{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{(p,q)\in J_n} u_{p,q}$ existe et qu'elle-ci ne dépend pas de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$!

La somme (*) correspond à l'exhaustion :



etc (déjà vue)

Mais on peut aussi faire celle-ci :



qui correspond à $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{0\le k,l\le n} u_{k,l} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}\right)\right)$

$= \boxed{\exp(A)\exp(B)}$ $((f,g)\mapsto f\circ g$ est $C^0)$ ce qui conclut. □

(**) car on est ramené à la sommabilité (ds $\mathbb{R}$) de $\sum_{p,q} \frac{|||A|||^p\, |||B|||^q}{p!\, q!}$ et ça vous avez dû le voir ?

Vu que $\exp(0_{\mathcal{L}_c(E)}) = id_E$, on a :

Corollaire : $\forall A \in \mathcal{L}_c(E)$, $\exp(A)$ est inversible et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$

Dans le cas de la dimension finie, on considère $E = \mathbb{K}^N$ muni d'une norme quelconque et on identifie $\mathcal{L}_c(E)$ à $M_n(\mathbb{K})$

Proposition : Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$

Preuve : Spdg opsq $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (on peut tjs considérer une matrice réelle comme une matrice complexe particulière !)
Si $A \in M_N(\mathbb{C})$, $\exists\, S \in Gl_N(\mathbb{C})$ et T triangulaire sup tq $A = S^{-1}TS$ (car le polynôme caract. de A est scindé sur $\mathbb{C}$).

Lemme (à retenir) $A = S^{-1}TS \Rightarrow \exp(A) = S^{-1}\exp(T)S$

En effet, $\exp(A) = \exp(S^{-1}TS) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(S^{-1}TS)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} S^{-1}\left(\frac{T^k}{k!}\right)S$

$$= S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{T^k}{k!}\right)S$$

$\left(\overbrace{(S^{-1}T\underbrace{S)(S^{-1}}_{id}T\underbrace{S)\cdots(S^{-1}}_{id}TS)}^{k \text{ fois}} = S^{-1}T^kS \right)$

(En passant par les sommes partielles et en utilisant la continuité de l'application $M \longmapsto S^{-1}MS$ sur $M_n(\mathbb{R})$)

Donc $\det(\exp(A)) = \det(\exp(T))$
(invariance du det par conjugaison)
Mais $\mathrm{Tr}(T) = \mathrm{Tr}(A)$ (idem) donc il suffit de se restreindre au cas des matrices triangulaires.

Or si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$, $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & *' \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N^k \end{pmatrix}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, donc

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda_1^k}{k!} & & *'' \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda_N^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & *'' \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_N} \end{pmatrix}$$

dont le det est $e^{\lambda_1} \times \cdots \times e^{\lambda_N}$
$= e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_N)}$
$= e^{\mathrm{Tr}(A)}$, CQFD □

(Cette formule explique notamment pourquoi la "divergence" d'un champ de vecteurs est ce qu'elle est
$\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)(p) = \mathrm{Tr}(DX_p)$

développement EDO

$= \ln\left(\det\left(\underbrace{\exp(DX_p)}_{\text{détermine le comportement local des solutions}}\right)\right)$

$\mathrm{div}(X)_p < 0 \iff \det(\exp) < 1$
$\iff$ le champ est "contractant" "converge"
$\mathrm{div}(X)_p > 0 \iff \det(\exp) > 1$
$\iff$ le chp est "dilatant" "diverge")