$\forall k \in \mathbb{N}$, on a $\left\| \sup\limits_{l \geq k} \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty \to 0\right.$ car $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\| \, \|_\infty$

or $\sup\limits_{l \geq k} \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty = \sup\limits_{l\geq k}\left( \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n^{(k)} - x_n^{(l)}|\right)$

$\geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Big( \underbrace{\sup\limits_{l \geq k} |x_n^{(k)} - x_n^{(l)}|}_{\geq\ |x_n^{(k)} - x_n^{\infty}|} \Big)$ à vérifier !

$|x_n^{(k)} - x_n^{\infty}|$ par passage à la limite (dans $\mathbb{R}$ !) qd $l \to +\infty$

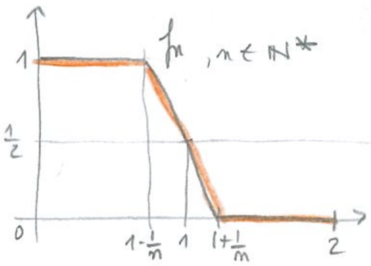
$\geq \|x^{(k)} - x^{\infty}\|_\infty$, qui est en particulier fini, donc $x^\infty \in l^\infty$, et qui tend vers 0, donc $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ cv vers $x^\infty$ dans $l^\infty$. □

Exercice $\forall$ $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, vérifier que $l^p \subset l^q$ et que $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ $\forall x \in l^p$.

3) Espaces de fonctions (continues)

On a déjà vu que pour $a<b \in \mathbb{R}$, $\big(\underbrace{C([a,b],\mathbb{K})}_{E}, \| \, \|_\infty\big)$ était un EVN complet, donc un espace de Banach, et que en revanche, $(C([a,b],\mathbb{R}), \| \, \|_p)$ n'était pas complet. (chap 2, p. II.21-22)

(Résolution de l'exo correspondant : on considère la suite




$\forall n,m \in \mathbb{N}^*$, $n \leq m$, $\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^2 |f_n(t) - f_m(t)|\,dt$

$\leq \int_{1-\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} \underbrace{|f_n(t) - f_m(t)|}_{\leq 1}\,dt \leq \frac{2}{n}$

($f_n$ et $f_m$ coïncident en dehors de cet intervalle

donc $(f_n)_n$ est de Cauchy pour $\| \, \|_1$ (et donc pour $\| \, \|_p$ d'après l'exo précédent)

Supposons que $(f_n)$ cv vers $f \in E$ pour $\| \, \|_p$, ie que $\int_0^2 |f_n(t) - f(t)|^p dt \to 0$

Alors $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^p dt \to 0$

$\geq \int_0^{1-\frac{1}{n}} |1 - f(t)|^p dt$ ; ceci est donc une suite croissante qui tend vers 0 $\to$ identiquement nulle. Et comme $|1-f|^p$ est $C^0$ et $\geq 0$ sur $[0,1-\frac{1}{n}]$, cela entraîne $|1-f|^p \equiv 0$ sur $[0,1-\frac{1}{n}]$ $\forall n$, donc $f = 1$ sur $[0,1[$

De même $f = 0$ sur $]1,2]$. Impossible ! Donc $(f_n)$ ne cv pas dans $(E, \| \, \|_p)$ □

La complétude de $(C([a,b],\mathbb{K}), \| \|_\infty)$ se généralise de la façon suivante :

**Thm** • Soient $(X,\tau)$ un et et $(E,d)$ un e.m complet. Soit $\mathscr{C}_b(X,E)$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $(X,\tau)$ dans $(E,d)$, muni de la distance (exercice) $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$. Alors $(\mathscr{C}_b(X,E), d_\infty)$ est un espace métrique complet. $(\mathcal{B}(X,E), d_\infty)$ (fonctions slt bornées) aussi.

• Notamment, si $(X,\tau)$ est compact, toutes les fct° continues sont bornées donc on obtient que $(\mathscr{C}(X,E), d_\infty)$ est un e m complet.

• Si $(E,d) = (E,\| \|)$, ie si $E$ est un Banach, alors $d_\infty$ ci-dessus est associée à une norme (exercice) sur $\mathscr{C}_b(X,E)$ : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$

et l'EVN (exercice) $(\mathscr{C}_b(X,E), \| \|_\infty)$ est alors un espace de Banach.

(et encore une fois si $(X,\tau)$ est compact on pourra enlever le "b" de "borné")

4) Espaces d'applications linéaires continues

Cas de la dim finie : si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ sont des $\mathbb{K}$EVN de dimension finie, $\mathcal{L}(E,F)$ (qui sont toutes l'espace vectoriel des applications linéaires de $E$ dans $F$, continues) est un e.v de dimension finie (si $\dim E = n$ et $\dim F = m$, il est isomorphe, via un choix de bases de $E$ et $F$, à $M_{m\times n}(\mathbb{K})$), donc muni de n'importe quelle norme (elles sont toutes équivalentes) $\|\cdot\|$, $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

On considère maintenant le cas général mais on se restreint aux applications linéaires continues, dont on note l'espace (vectoriel) $\mathcal{L}_c(E,F)$. On a vu qu'alors

$$|||f||| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E \le 1}} \|f(x)\|_F = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$, pour $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, définissait une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ (subordonnée à $\| \|_E$ et $\| \|_F$)

**Proposition** : Si $(F, \| \|_F)$ est un Banach, alors $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\ |||)$ est un Banach.

Preuve On va appliquer le résultat du § précédent sur les applications continues.

⚠ Les applications linéaires continues ne sont en général pas bornées, mais elles le sont sur $\overline{B}_E(0,1)$ !

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n,m\geq N,\ |||f_n - f_m||| < \varepsilon$, ie $\sup_{x\in\overline{B}_E(0,1)} \|f_n(x)-f_m(x)\|_F < \varepsilon$

en d'autres termes $\|f_n|_{\overline{B}} - f_m|_{\overline{B}}\|_\infty < \varepsilon$ où ici $\|\ \|_\infty$ désigne la norme uniforme sur l'espace des fonctions continues bornées de $\overline{B}_E$ dans $F$ : $\mathcal{C} = \mathcal{C}_b((\overline{B}_E, \|\ \|_E), (F, \|.\|_F))$. $(f_n|_{\overline{B}_E})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy de cet espace, qui est complet pour $\|\ \|_\infty$ d'après le § précédent, donc elle converge vers $f\in\mathcal{C}$.

On étend $f$ à $E$ en posant, $\forall x\in E\setminus\{0\}$, $f(x) = \|x\| f\Big(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\in \overline{B}_E}\Big)$

Affirmation 1 $f\in\mathcal{L}_c(E,F)$ (exercice)

Affirmation 2 $|||f_n - f||| \to 0$ Ceci est immédiat puisque

$|||f_n - f||| = \|f_n|_{\overline{B}_E} - f|_{\overline{B}_E}\|_\infty$ qui tend vers 0 par def de $f$.

Ce qui conclut $\square$

Rq Une autre façon de dire les choses est que $\{f|_{\overline{B}_E},\ f\in\mathcal{L}_c(E,F)\} = A$ est un sous ensemble fermé de $(\mathcal{C}_b(E,F), \|\ \|_\infty)$ (c'est plus ou moins l'affirmation 1), qui est complet, donc le 1er est complet, mais celui-ci est isométrique à $(\mathcal{L}_c(E,F), |||.|||)$. En effet, l'applicat° :

$$\varphi : (\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||) \longrightarrow (\mathcal{C}_b(\overline{B}_E, F), \|\ \|_\infty) \text{ est un plongement}$$
$$f \longmapsto f|_{\overline{B}_E}$$

isométrique d'image $A$.
(↳ une appli satisfaisant $\|\varphi(f)-\varphi(g)\|_\infty = |||f-g|||$)

---

On s'intéresse particulièrement au cas où $(E,\|\ \|_E) = (F,\|\ \|_F)$ et à l'ensemble des endomorphismes continus de $E$, $\mathcal{L}_c(E) := \mathcal{L}_c(E,E)$, muni de la norme $|||\ |||$

Alors :

Prop Si $(E,\|\ \|_E)$ est un Banach, $(\mathcal{L}_c(E), |||.|||)$ est une algèbre de Banach unitaire

(on ne va pas donner la def, on va lister les propriétés de $\mathcal{L}_c(E)$ qui en font un tel espace)

Prop (suite) $\mathcal{L}_c(E)$ est muni de deux lois de composition interne ($+$ et $\circ$) et d'une action de $\mathbb{K}$ (notée "$\cdot$") telles que

algèbre associative unitaire
- (i) $(\mathcal{L}_c(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ev
- (ii) La composition $\circ$ : $\mathcal{L}_c(E) \times \mathcal{L}_c(E) \to \mathcal{L}_c(E)$, $(f, g) \mapsto f \circ g$ est bilinéaire, associative, et munie d'un élément neutre $id_E$ (en particulier $(\mathcal{L}_c(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire)

En outre, $\mathcal{L}_c(E)$ est muni d'une norme $|||\cdot|||$ telle que
- (iii) $(\mathcal{L}_c(E), |||\cdot|||)$ est un espace de Banach
- (iv) $\forall f, g \in \mathcal{L}_c(E) \quad |||f \circ g||| \leq |||f||| \times |||g|||$

Exo : vérifier (ii). Le reste a déjà été fait.

Rq (i)+(ii)+(iv) fait de $(\mathcal{L}_c(E), +, \circ, \cdot, |||\cdot|||)$ une algèbre normée. (que $(E, \|\ \|_E)$ soit un Banach ou non)

Dans la suite, on notera souvent $A, B$ des élts de $\mathcal{L}_c(E)$ et $AB$ leur composée, par analogie avec les matrices, qui sont le principal exemple à avoir en tête.

## (B) Séries dans les espaces de Banach

On utilise les mêmes notations que dans $\mathbb{K}$ : si $(E, \|\ \|)$ est un EVN et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ la "série" $\sum_k x_k$ désigne la suite des sommes partielles $\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} x_k}_{\in E \text{ (bien défini car } E \text{ est un } \mathbb{K}\text{ev)}}\Big)_{n \in \mathbb{N}}$.

On dit que la série $\sum_k x_k$ converge si la suite ci-dessus converge et on note alors $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ $(\in E)$ sa limite. On a par contre une nouvelle définition

Def On dit que la série $\sum_k x_k$ converge normalement si la série numérique $\sum_k \|x_k\|$ CV

Vous avez déjà vu la convergence normale notamment pour les séries de fonctions continues : si $(E, \|\ \|) = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$, on retrouve cette notion de CV normale déjà étudiée. Et vous avez vu que la CV normale d'une série de fct° $\Rightarrow$ la CV uniforme, ie la CV dans $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. Eh bien c'est un fait général dans les Banach (ce qui est bien le cas de l'espace ci-dessus). Et au fait, cas particulier encore + simple : $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. La CVN équivaut alors à la CVAbs

**Proposition** Si $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et si $\sum_k x_k$ est une série normalement convergente dans $E$, alors $\sum_k x_k$ est convergente. Mieux : pour toute permutation $\sigma$ de $\mathbb{N}$, $\sum_k x_{\sigma(k)}$ est également convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \sum_{k=0}^{+\infty} x_{\sigma(k)}$

⚠ L'addition a beau être commutative, quand on fait une somme infinie en général on ne peut pas intervertir les termes ! La somme peut en être changée !

ex. dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Vu l'énoncé ci-dessus il nous faut chercher un contre exemple parmi les séries semi-convergentes, typiquement $\sum \frac{(-1)^k}{k+1}$

(Classique) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$ $\left( \text{et } \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k+1} \right| = +\infty \right)$

Eh bien on peut mq $\forall \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\exists\, \sigma$ permutation de $\mathbb{N}$ tq

$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ ! (Il y a un thm général pour ça, le thm de réarrangement de Riemann)

Rq Comme dans $\mathbb{R}$, si $\sum_k x_k$ cv, alors $\|x_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

En effet, $\|x_n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k \right\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \to \sum_{k=0}^{+\infty} x_k, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} x_k \to \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

La prop ci-dessus nous dit que : si $\|x_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ assez vite pour que $\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\| < +\infty$, alors $\sum_k x_k$ cv.

**Preuve de la proposition** Commençons par montrer la cv de $\sum_k x_k$. Pour cela, comme $(E, \|.\|)$ est complet, il suffit de mq cette suite est de Cauchy (celle des sommes partielles !). Or

$$\forall m \le n \in \mathbb{N}, \quad \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{m} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = \Big| \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \|x_k\|}_{S_n} - \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \|x_k\|}_{S_m} \Big|$$

Or $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv donc est de Cauchy donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall N \le m \le n$, $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$, ce qui conclut.

Soit maintenant $\sigma$ une permutation de $\mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\sum x_k$ CVN donc pour $m \in \mathbb{N}$ assez gd, $\sum_{k=m+1}^{+\infty} \|x_k\| < \varepsilon$ (IV 8)

Pour un tel $m$, prenons $N$ tq $\{0, \dots, m\} \subset \sigma(\{0, \dots, N\})$ ($\sigma$ est surjective !)

Alors pour tout $n \geq m$,

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{N} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{\substack{k \in [\![m+1, n]\!] \\ \cap \\ [\![m+1, +\infty[\![}} x_k - \sum_{\substack{j \in \sigma(\{0,\dots,N\}) \setminus \{1,\dots,m\} \\ \cap \\ [\![m+1, +\infty[\![}} x_j \right\|$$

$$\leq 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} \|x_k\| < 2\varepsilon$$

donc par passage à la limite qd $n \to +\infty$, $\left\| \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} x_k}_{S} - \sum_{k=0}^{N} x_{\sigma(k)} \right\| < 2\varepsilon$

pour tout $N$ assez grand, ce qui donne bien la convergence de $\sum_k x_{\sigma(k)}$ vers $S$ $\square$

---

- Application 1. Soit $(E, \|\,\|)$ un espace de Banach.

Déf On dit que $A \in \mathcal{L}_c(E)$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}_c(E)$ tq $AB = BA = id_E$

Rq En fait $B : E \to E$ suffit, autrement dit il suffit que $A$ soit bijective, et son inverse sera automatiquement linéaire (exo) et continue. Cela se montre par le thm de l'application ouverte que vous verrez sans-doute en calcul diff au 2nd semestre.

On note $GL_c(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}_c(E)$. On va montrer que c'est un ouvert et que l'appli $\begin{array}{ccc} GL_c(E) & \to & GL_c(E) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}$ est $C^0$.

Rq a) pour $(E, \|\,\|) = (\mathbb{R}, |\,|)$, $\mathcal{L}_c(E)$ s'identifie à $\mathbb{R}$ et $GL_c(E)$ à $\mathbb{R}^*$, et on est juste en train de dire que $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et que $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est continue.

b) si $E$ est de dim finie $n$, $\mathcal{L}_c(E) \simeq M_n(\mathbb{R})$, $GL_c(E) \simeq GL_n(\mathbb{R})$, et on a un moyen bien pratique de montrer les résultats ci-dessus : le déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. On a déjà vu (je crois) que celui-ci était continu. Or $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}^*}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}})$, donc ouvert de $M_n(\mathbb{R})$, et

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{com}(A)$, donc les composantes de cette application sont rationnelles en les coeff de $A$, donc cette applicat° est $C^0$.