Chap 4 : Complétude et applications

Pourquoi on les aime tant ? Parce qu'ils permettent de faire plein de choses qu'on ne peut pas faire dans les espaces métriques quelconques.
Ils donnent principalement des résultats d'existence

(• point fixe d'applications contractantes
  ↳ solutions d'équa-diff
  ↳ théorème d'inversion locale, des fonctions implicites
  ↳ méthode de Newton (recherche de 0 de fonctions)
• fonctions continues partout dérivables nulle part
• existence de prolongements continus d'applications ...)

On va s'intéresser dans un premier tps au cas particulier des espaces de Banach, puis au cas encore plus particulier des espaces de Hilbert, puis on reviendra à des thm généraux sur les e.m. complets.

Rappels
- Un e.m. est complet si toutes ses suites de Cauchy convergent (déf)
- Un e.m compact est complet
- Dans (E,d) e.m, $A \subset E$ complet $\Rightarrow$ A fermé
- Dans (E,d) e.m complet, $A \subset E$ fermé $\Rightarrow$ (A, d_A) complet

§1. Espaces de Banach

Rappel Un espace de Banach est un evn $(E, \|\ \|)$ complet.

(A) Exemples importants

1) $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_p)$ $(p \in [1, +\infty[,\ n \in \mathbb{N}^*)$

Prop | $\forall n, \forall p$, cet espace est complet.

En effet, il suffit de le vérifier pour $p = +\infty$ par équivalence des normes sur $\mathbb{K}^n$.
Et toute suite de Cauchy ds $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty)$ est bornée donc, par B-W, admet une sous-suite convergente, donc converge.

2) Espaces de suites

Rappel $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_p < +\infty \}$ où $\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$ si $p < +\infty$

$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$

Prop $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un espace de Banach.

On a déjà admis que ℓ^p était un EVN. Reste à montrer la complétude. On peut $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ idem.

Preuve Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^p

Attention ! Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)} = (x^{(k)}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle tq $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^{(k)}|^p < +\infty$

$\boxed{\text{Cas } p<+\infty}$ a) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la suite réelle $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$. $\exists K \in \mathbb{N}$ tq $\forall k, \ell \geq K$ $\|x^{(k)} - x^{(\ell)}\|_p < \varepsilon$

$$\|x^{(k)} - x^{(\ell)}\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(\ell)}|^p\right)^{1/p}$$

somme de termes positifs !

En particulier, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|x_n^{(k)} - x_n^{(\ell)}|^{(p)} < \varepsilon^{(p)}$, ce qui montre bien le caractère lipschitz souhaité. Cette suite CV donc (dans $\mathbb{R}$) vers un réel x_n^∞. On note $x^\infty = (x_n^\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle ainsi obtenue.

b) $x^\infty \in \ell^p$. Pour cela il suffit de montrer que $x^{(k)} - x^\infty \in \ell^p$ pour un certain k (ℓ^p est un ev !)

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists K \in \mathbb{N}$ tq $\forall k, \ell \geq K$, $\|x^{(k)} - x^{(\ell)}\|_p < \varepsilon$, ie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(\ell)}|^p < \varepsilon^p.$$

En particulier, pour $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} |x_n^{(k)} - x_n^{(\ell)}|^p < \varepsilon^p$

Pour un tel N, on a une somme finie, donc on peut passer à la limite qd $\ell \to +\infty$ ce qui donne $\sum_{n=0}^{N} |x_n^{(k)} - x_n^\infty|^p < \varepsilon^p$ (*)

Donc la série à termes positifs $\sum_n |x_n^{(k)} - x_n^\infty|^p$ est convergente donc $x^{(k)} - x^\infty \in \ell^p$ ce qu'on voulait. Et par passage à la limite dans (*) qd $N \to +\infty$ on obtient $\|x^{(k)} - x^\infty\|_p \leq \varepsilon$ $\forall k \geq K$ ce qui montre au passage :

c) $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ CV vers x^∞ dans ℓ^p,

et conclut donc la preuve de la complétude. $\square$

Question : pourquoi ça ne marche pas pour L^p ?

$\boxed{\text{Cas } p=+\infty}$ a) A nouveau, si $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans ℓ^∞, chaque $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc convergente et on note x_n^∞ sa limite et $x^\infty = (x_n^\infty)_{n\in\mathbb{N}}$.