§5. Compacité

Dans tout ce paragraphe, $(E,\mathcal{T})$ désigne un espace métrique séparé

Ⓐ Définition(s) et propriétés

Déf. Si $A\subset E$, on dit qu'une famille $(V_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de A si, $\forall i\in I$, $V_i\in\mathcal{T}$ et $A\subset\bigcup_{i\in I}V_i$. On dit que ce recouvrement est fini si I est fini.

Déf. On dit qu'un sous-ensemble A de E est compact s'il a la propriété de Borel Lebesgue : de tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Si $A=E$, on dit que l'e.t $(E,\mathcal{T})$ est compact

Si $(V_i)_{i\in I}$ est un rec. ouvert de A, $\exists\{i_1,\dots,i_m\}\subset I$ tq $A\subset V_{i_1}\cup\dots\cup V_{i_m}$

Rq1 Si $(E,\mathcal{T})$ n'est pas séparé et possède la propriété de Borel-Lebesgue, on dit parfois que $(E,\mathcal{T})$ est quasi-compact.

Rq2 Nous avions défini les espaces métriques compacts comme étant ceux qui ont la propriété de Bolzano-Weierstrass : de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente. On va voir que pour les espaces métriques, B-L et B-W sont équivalentes, mais que ce n'est pas le cas en général. Avant cela on va présenter des propriétés générales sur les e.t. compacts. On a déjà vu des applications de la compacité aux fonctions continues, et on en verra bien d'autres au chap. 4.

ex $[0,1[$ n'est pas un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$. En effet, $\left(]-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}[\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement ouvert de $[0,1[$ mais on ne peut pas en extraire un sous-rec. fini

Exo - toute union finie de s-ens compacts est compacte. (En particulier tout ensemble fini est compact)

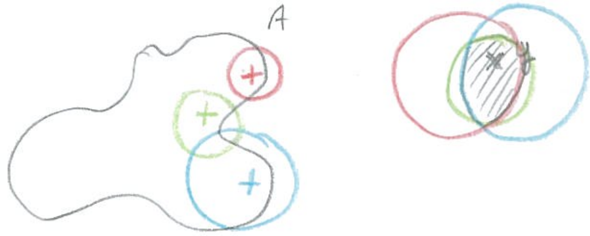
- $A\subset E$ est un s-ens compact $\Leftrightarrow$ l'e.t $(A,\underset{\text{topo induite}}{\mathcal{T}_A})$ est compact. (un e.t)

Rq Si $\hat{\tau}$ est + fine que τ, $\hat{\tau}$ possède + d'ouverts et de fermés que τ, mais moins de compacts ! En particulier,

- Si τ = topo discrète, compact $\Leftrightarrow$ fini
- Si τ = — grossière (Δ pas séparé) tout $A \subset E$ possède la prop de B-L

<u>Proposition</u> Si $A \subset E$ est compact alors A est fermé dans (E, τ)

<u>Preuve</u> Il s'agit de démontrer que ${}^cA$ est ouvert. Si $A = E$ il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $A \neq E$ et soit $y \in {}^cA$. Il s'agit de trouver un ouvert contenant y et disjoint de A.



Or E étant séparé, $\forall x \in A$, $\exists V_x$ vois ouvert de x, W_x — y tq $V_x \cap W_x = \emptyset$

$(V_x)_{x \in A}$ fournit un recouvrement ouvert de A. Il possède donc un sous recouvrement fini par compacité $(V_{x_i})_{i \in \{1, \dots, m\}}$, ac $x_i \in A$ $\forall i$.

Or $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$ est disjoint de $W = \bigcap_{i=1}^{m} W_{x_i}$ $\left(V \cap W = \bigcup_{i=1}^{m} \underbrace{(V_{x_i} \cap W)}_{\subset V_{x_i} \cap W_{x_i} = \emptyset} \right)$

donc $A \subset V$ aussi, et W est un vois ouvert de y comme intersection finie de vois ouverts. □

<u>Exo</u> Mq si A et B sont compacts et disjoints dans E séparé, il existe des ouverts disjoints V, W tq $A \subset V$ et $B \subset W$
"séparation des compacts". (cf. TD pour les espaces métriques)

<u>Proposition</u> : Si $A \subset E$ est compact et $B \subset A$ est fermé (pour τ ou τ_A !)
Alors B est compact
"Un fermé d'un compact est un compact"

<u>Preuve</u> exo

<u>Prop</u> : la propriété de B-L pour un e.t. (E, τ) est équivalente à : pour tte famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ d'intersection vide, il existe $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ tq $\bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} = \emptyset$

Preuve ... , par passage au complémentaire

Corollaire « Une suite de compacts emboîtés non vides a une limite non vide ».
Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des compacts non vides tq $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_n \dots$
Alors $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset$

Rq Ce n'est pas vrai en général si on enlève l'hyp de compacité !
ex $A_n = [n, +\infty[$, $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \emptyset$ (fermés mais non bornés)
$A_n =]0, 1/n[$ (bornés mais non fermés)

C'est bien pratique pour montrer notamment que certains ensembles d'accumulation sont non vides :

Proposition Si $A \subset E$ est compact, alors toute suite dans A possède un point d'accumulation dans A.

⚠ On n'a pas encore dit une sous-suite convergente. On a vu qu'en topo générale un pt d'accum. n'était pas tjs limite d'une sous-suite.
Ceci dit on se rapproche de l'équivalence B-L $\Leftrightarrow$ B-W dans les métriques

Preuve Soit $u \in A^{\mathbb{N}}$. On a vu que $Vd(u) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\overline{\{u_k, k \geq m\}}}_{B_m}$

or $\forall n$, B_m est fermé, inclus dans A compact donc compact, non vide,
et $B_{m+1} \subset B_m$. Par le corollaire ci-dessus $Vd(u)$ est donc non vide (et $\subset A$). □

Voici donc l'équivalence :

Proposition Pour tout ss ens A d'un espace métrique (E, d),
A satisfait B-L $\Leftrightarrow$ A satisfait B-W

On a déjà BL $\Rightarrow$ existence d'une valeur d'adh. ds A et comme dans un espace métrique une vd est limite d'une sous suite, on a B-W.

Il ne reste donc plus qu'à montrer B-W $\Rightarrow$ B-L. Pour cela il suffit de se restreindre au cas où $A = E$ tt entier, en considérant la topo induite (A, τ_A) et la distance induite (A, d_A).

On va en fait transiter par une autre propriété équivalente qui nécessite une nouvelle définition

Déf Un espace métrique (E,d) est précompact si pour $\forall \varepsilon > 0$, E admet un recouvrement fini par des boules de rayon ε.

Thm Pour un espace métrique (E,d) les 3 prop suivantes sont équivalentes

(i) (E,d) satisfait B-L

(ii) (E,d) satisfait B-W

(iii) (E,d) est complet et précompact

On a déjà vu (i) $\Rightarrow$ (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) On a déjà vu ds le chap 2 que BW $\Rightarrow$ complet

Si E n'est pas précompact, il existe $\varepsilon > 0$ tq aucune famille finie de boules de rayon ε ne recouvre E. On peut alors construire par récurrence une suite (x_n) tq $(*)_m$ $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ $\forall i < j \leq m$.

Une telle suite n'a aucune valeur d'adhérence

(si $d(x_N, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour un certain a, alors $d(x_m, a) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall m > N$)

Donc E n'est pas compact.

(iii) $\Rightarrow$ (i) C'est une généralisation du thm de Heine Borel qui prouve ce résultat pour $E = \mathbb{R}$.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E. On suppose qu'il n'admet pas de sous recouvrement fini. On construit par récurrence une suite de Cauchy (x_n) de la façon suivante.

On recouvre E par une union finie de boules fermées de rayon 1 (précompacité). Comme (U_i) n'admet pas de sous recouvrement fini, au moins l'une de ces boules n'admet pas de sous-rec par les U_i.

On la note B_0 et on appelle x_0 son centre.

$B_0 \dots B_m$ étant construites (B_k de rayon 2^{-k}) (ainsi que $x_0 \dots x_m$), de sorte que $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$ et B_j n'admette pas de ss rec fini par les $(U_i)_{i \in I}$,

On recouvre E par un nb fini de boules de rayon $2^{-(m+1)}$ et on ne garde que celles qui rencontrent B_m. Alors par récurrence l'une d'elle n'a pas de sous rec fini et on l'appelle B_{m+1}

Par construction $d(x_m, x_{m-1}) < 2^{-m} + 2^{-m+1}$ (exo) donc la suite est de Cauchy, donc elle converge (E complet) vers a, qui appartient à un U_i, donc $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(a, \varepsilon) \subset U_i$. Mais alors pour m assez gd,

$d(a, x_m) + 2^{-m} < \varepsilon$ donc $B(x_m, 2^{-m}) \subset B(a, \varepsilon) \subset U_i$ ce qui contredit le fait que B_m n'admette pas de ss rec fini. $\square$

On s'intéresse enfin aux produits d'espaces compacts :

Théorème de Tychonoff Un produit $E = \prod_{i \in I} E_i$ d'espaces topologiques compacts est compact.

Rq La réciproque est vraie : si un produit d'e.t est compact, les facteurs sont compacts. En effet, si E est compact, il est séparé. On a vu qu'alors les E_i sont séparés. Mais alors $E_i = \pi_i(E)$ (π_i proj canonique sur le facteur E_i), image d'un compact par une appli C^0 à valeurs dans un espace séparé. E_i est donc compact.

Preuve de Tychonoff dans le cas où les E_i sont métrisables et I est dénombrable

On traite le cas $I = \mathbb{N}^*$ et on laisse le cas fini au lecteur.

- On a vu que si d_i étaient des distances définissant la topo des E_i

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}$$

définissait une distance sur E définissant la topo produit.

(En particulier E est métrisable donc séparé). Pour montrer la compacité de E il suffit donc de montrer que E est complet et précompact.

- précompacité : Soit $\varepsilon > 0$ donné et soit $m \in \mathbb{N}$ tq $2^{-m} < \varepsilon$

Chaque X_i, $i \leq m$, est recouvert par un nb fini de d-boules de rayon ε $\{B_i^j\}_{j=1 \text{ à } k_i}$. Pour $j = (j_1, \dots, j_m) \in \underbrace{[\![1, k_1]\!] \times \dots \times [\![1, k_m]\!]}_{\text{ensemble fini}}$, $R_j := \prod_{i=1}^{m} B_i^{j_i}$

Ces rectangles recouvrent $\prod_{i=1}^{m} E_i$.

Les $R_j \times \prod_{i>m} E_i$ maintenant recouvrent E. Or chacun est inclus dans une d-boule de rayon 2ε. En effet, si $x_1 \dots x_m$ sont les centres des facteurs de R_j et pour n'importe quel $(x_k)_{k>m}$, $\forall y \in R_j \times \prod_{i>m} E_i$,

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} 2^{i} \underbrace{\frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}}_{\leq d_i(x_i,y_i) < \varepsilon}}_{<\varepsilon} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{+\infty} 2^{-i} \underbrace{\frac{\quad}{\quad}}_{\leq 1}}_{2^{-n} < \varepsilon}$$

Donc E est recouvert par un nb fini de d-boules de rayon 2ε.

- Complétude Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. Alors (l'écrire !) $\left(\pi_i(x_n) = x_n^{(i)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E_i, donc converge car E_i est compact donc complet. Notons $x_\infty^{(i)}$ sa limite.

Affirmation : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers $x_\infty = \prod_{i\in I} x_\infty^{(i)}$

La preuve est similaire à ce qui précède : Soit $\varepsilon>0$ et $k\in\mathbb{N}$ tq $2^{-k}<\varepsilon$

(x_n^i) cv vers x_∞^i pour tout $i\in[\![1,k]\!]$ donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tq

$\forall n\geq N,\ \forall i\in[\![1,k]\!],\ d_i(x_n^{(i)},x_\infty^{(i)})<\varepsilon$

Mais alors $\forall n\geq N$, $d(x_n,x_\infty)=\sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i}\dfrac{d_i(x^i_n,x^i_\infty)}{1+d_i(x^i_n,x^i_\infty)}$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{k}2^{-i}\underbrace{\frac{d_i(\ )}{1+d_i(\ )}}_{<\varepsilon}}_{<\varepsilon}+\underbrace{\sum_{i=k+1}^{+\infty}2^{-i}\frac{d_i(\ )}{1+d_i(\ )}}_{\leq 2^{-k}<\varepsilon}<2\varepsilon$$

Ce qui prouve la convergence. □

On aurait aussi pu montrer que toute suite de E possédait une sous-suite convergente en utilisant le procédé d'extraction diagonale de Cantor

(B) Compacité et continuité, application à la séparation des compacts/fermés

Proposition Soient $(E_1,T_1),(E_2,T_2)$ des e.t séparés et $f:E_1\to E_2$ une application continue. Si $A\subset E_1$ est compact, $f(A)\subset E_2$ est compact.

Démonstration Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$ dans E_2.

Alors $A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(\bigcup_{i\in I}U_i)=\bigcup_{i\in I}\underbrace{f^{-1}(U_i)}_{\text{ouverts}}$. Comme A est compact, $\exists\, i_1\ldots i_m\in I$ tq $A\subset\bigcup_{j=1}^{m}f^{-1}(U_{i_j})$

Mais alors $f(A)\subset f\left(\bigcup_{j=1}^{m}f^{-1}(U_{i_j})\right)=\bigcup_{j=1}^{m}f(f^{-1}(\ ))=\bigcup_{j=1}^{m}U_{i_j}$

et on a trouvé un sous rec. ouvert de $f(A)$. □

non traité

Application

Proposition Soit (E,d) un e.m et $A\subset E$ un sous ensemble compact. Alors $\forall x\in E$, $\exists a\in A$ tq $d(x,A)=d(x,a)$

Démo La fonction $\varphi: A\to\mathbb{R}_+$, $y\mapsto d(x,y)$ est continue (lipschitzienne) sur un compact donc son image est un compact. φ admet donc un minimum$_x$ sur A : $\exists a\in A$ tq $d(x,a)=\min_{y\in A}d(x,y)=d(x,A)$

Rq si E est un evn de dimension finie, le résultat reste vrai si on suppose seulement A fermé et non vide. En effet, $\forall R > dist(x,A)$,

$$dist(x,A) = dist(x, \underbrace{A \cap \overline{B}(x,R)}_{\text{compact!}})$$

⚠ faux en dim infinie. Essayer de trouver un contre exemple ac tout ce qu'on a vu jusqu'ici

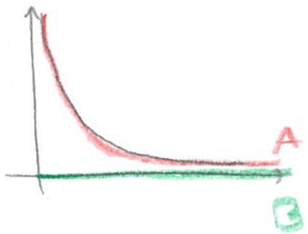
On montre également :

Proposition Si (E,d) est un e.m et si $A, B \subset E$ sont des compacts non vides, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tq $d(a,b) = dist(A,B)$.

En particulier, si $A \cap B = \emptyset$, $dist(A,B) > 0$

Rq à nouveau, si E est un evn de dimension finie, on a le même résultat si A est fermé et B compact. En revanche si A et B sont seulement fermés, on peut avoir $A \cap B = \emptyset$ et $dist(A,B) = 0$

Exemple $B = [0,+\infty[\times \{0\}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0 \text{ et } xy = 1\}$



Def Si (E,d) est un e.m et $A \subset E$ alors $\forall \varepsilon > 0$ on définit le ε-voisinage (ouvert) de A par :

$$A_\varepsilon = \{x \in E \mid dist(x,A) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B(a,\varepsilon)$$

Corollaire Si $A, B \subset E$ sont compacts (non vides) et disjoints, alors

$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$ si $\varepsilon \leq \frac{1}{2} dist(A,B)$

(On avait déjà vu qu'on pouvait séparer les compacts dans n'importe quel espace topologique)

En fait, on peut aussi séparer par des ouverts des fermés disjoints :

Prop Soit (E,d) un e.m. et $A, B \subset E$ des fermés disjoints. Alors il existe des ouverts V_A, V_B tq $A \subset V_A$, $B \subset V_B$ et $V_A \cap V_B = \emptyset$

Dem on se place dans le cas $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ (sinon évident)

On considère la fonction continue $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{dist(x,A)}{dist(x,A) + dist(x,B)}$$

(le dénominateur ne s'annule pas car A et B sont des <u>fermés disjoints</u>)

On pose alors $V_A = f^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[)$ et $V_B = f^{-1}(]\frac{1}{2}, +\infty[)$. $\square$

<u>Bilan</u> On peut : • séparer les fermés disjoints dans un espace métrique,

• séparer les compacts disjoints dans un espace séparé.

• dans un e.m, $dist(x, A)$ est atteinte $\forall x$ si A compact

• dans un evm df $dist(x, F)$ est atteinte $\forall x$ si F fermé

<u>Espaces normaux</u>

<u>Def</u> un et est dit normal s'il est séparé et si deux fermés disjoints sont contenus dans des ouverts disjoints

<u>Corollaire de ci dessus</u> : Les e.m et les et. compacts sont normaux.

<u>Application</u> <u>Thm d'extension de Tietze Urysohn</u> : Si (E, τ) est un et normal, $A \subset E$ un fermé et $f : A \to \mathbb{R}$ une appli continue, alors il existe un prolongement continue $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ ayant les mêmes inf et sup que f