

On a déjà vu la convexité par arcs. On la définit plus formel pour les e.t. généraux. On va maintenant introduire une autre notion de convexité :

Définition: On dit qu'un e.t. (E, τ) est convexe si E et \emptyset sont les seuls sous-ensembles de E qui soient à la fois ouverts et fermés. On dit qu'un sous-ensemble $A \subseteq E$ est convexe si (A, τ_A) est un e.t. convexe.

En d'autres termes (et c'est peut être plus parlant), un e.t. (E, τ) est convexe si il n'existe pas de décomposition de la forme $E = V_1 \cup V_2$ où V_i sont des ouverts (ou des fermés!) non vides disjoints. On ne peut pas décomposer E en 2 "morceaux" disjoints, E est en un seul morceau.

Quelle est la différence avec l'autre notion de "en un seul morceau" que nous avons vue? On va le voir juste après cette caractérisation.

Proposition: L'e.t. (E, τ) est convexe ssi toute application continue $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ (muni de la topo discrète) est constante.

Preuve Si $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ est continue, $E = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$ est une partition de E en deux ouverts disjoints. Si E est convexe, on a donc $f^{-1}(\{0\})$ ou $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ donc f est constante.

Inversement, si $E = V_1 \cup V_2$ avec V_1, V_2 ouverts non vides disjoints, on définit f sur E par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in V_1 \\ 1 & \text{si } x \in V_2 \end{cases}$. Alors f est continue (cf continuité sur des sous-ensembles ouverts) et f est non constante. \square

On en déduit :

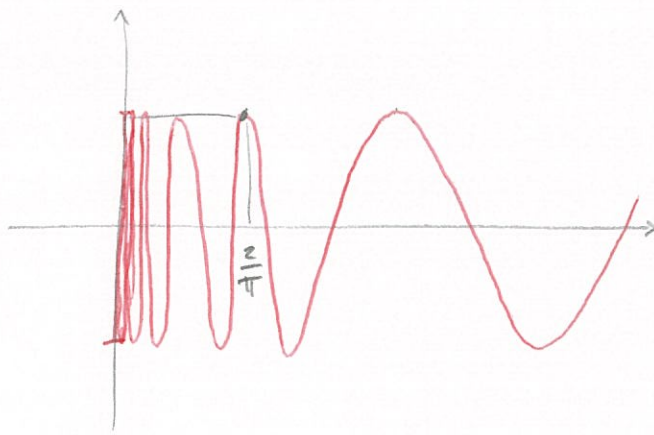
Proposition: Convexe par arcs \Rightarrow convexe

Preuve Soit E un ensemble convexe par arcs et $f: E \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Alors $f(E)$ est convexe par arcs (cf chap 2), or $\{0, 1\}$ ne l'est pas donc $f(E) = \{0\}$ ou $\{1\}$, donc f est constante. Ainsi E est convexe.

ça nous donne donc plein d'exemples de convexes (boules dans \mathbb{R}^n) convexes

\triangle La réciproque est fautive. Le contre-exemple ultra classique est le suivant : $A = \{0\} \times [-1, 1] \cup \text{graphe} \left(x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in \mathbb{R}^* \right)$
($\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\text{euc}}$)

Ca ressemble à :



Pourquoi est-ce convexe? Soit f une fonction continue sur cet ensemble, à valeurs dans $]0,1[$. $G(\dots)$ est convexe par arcs (car image de \mathbb{R}^+ , c. par arcs, par une appli $C^0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto (x, \sin(\frac{x}{2}))$) donc f est constante sur ce graphe.

de plus, tout point de $]0,1[\times]-1,1[$ est limite d'une suite d'elts de G (dans \mathbb{R}^2 donc dans (A, τ_A)) donc par continuité, la valeur de f en un tel pt est celle de f sur le graphe, et finalement f est constante. Donc A est convexe.

Rq En fait on a montré un résultat général : l'adhérence d'un ensemble convexe par arcs est convexe. (on va voir + général)
 Par contre, pas nécessairement c.p.a.

Pourquoi n'est-ce pas convexe par arcs? Supposons qu'il existe une arc continue γ joignant $(\frac{2}{\pi}, 0)$ à un point de $]0,1[\times]-1,1[$ dans A . Quitte à raccourcir γ , on peut supposer $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. On a alors $\lim_{t \rightarrow 1} x(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 1} y(t) = y_0$. Montrons un fait contradictoire:

Affirmation $\forall \delta > 0 \quad \gamma_2([1-\delta, 1[) =]-1, 1[$ tout entier

• $\gamma_1(1-\delta) > 0$ et $(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi})_{k \in \mathbb{N}}$ tendent vers 0 donc

$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad 0 < u_n < v_n < \gamma_1(1-\delta)$

• $\gamma_1(t) \rightarrow 0$ donc $\exists t_0 > 1-\delta \forall t \in]t_0, 1[\quad 0 < \gamma_1(t) < u_n < v_n < \gamma_1(1-\delta)$

Alors $\gamma_2([1-\delta, 1[) \supset \gamma_2([1-\delta, t_0]) = f(\gamma_1([1-\delta, t_0])) \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f([u_n, v_n])$

TVI \cup TVI encas

Donc $\gamma_2(t)$ n'a pas de limite qd $t \rightarrow 1$.

$[f(u_n), f(v_n)]$

"
 $]-1, 1[$

En revanche, pour les ouverts d'un ERM on a équivalence entre convexe et convexe par arcs. On verra qd on aura vu les composantes convexes.

Bien sûr encore une fois la convexité dépend bcp de la topo considérée. (III.20)

- Si E est muni de la topo géométrique, il sous-ensembles de E est convexe
- Si E est discret, les seuls sous-ensembles convexes non vides de E sont les singletons.

Revenons un instant à \mathbb{R} . Les intervalles sont cpa donc convexe. Qu'en est-il de la réciproque? On a vu qu'elle est vraie pour cpa, elle l'est aussi pour convexe.

↳ Prop: Dans $(\mathbb{R}, \text{topologie})$, les sous-ensembles convexes sont exactement les intervalles.

Reste à montrer qu'un sous-ensemble est un intervalle. Par contraposée, si A n'est pas un intervalle, A n'est pas convexe, donc $\exists a < b \in A$ et $c \in A^c$ tq $a < c < b$. Mais alors $A \cap]-\infty, c[$ et $A \cap]c, +\infty[$ sont des ouverts non vides disjoints de A dont la réunion est A . Donc A n'est pas convexe.

Un corollaire qui servira souvent: le seul sous-ensemble non vide ouvert et fermé d'un intervalle est lui-même -
On utilise ça en appelant un argument de convexité.

Exemple: cf III.20 bis (?)

De retour à la situation générale, pour mg' un ensemble est convexe on peut avoir recours à:

Proposition 1: Soient A et B deux ensembles convexes non disjoints. Alors $A \cup B$ est convexe.

Preuve: exercice

△ on ne peut rien dire de l'intersection

Corollaire: Si $(A_i)_{i \in I}$ sont des convexes et $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est convexe.
(ii) dans le cas dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il suffit de supposer $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.

exo M_q
 \mathbb{R}^m top est convexe
 $\Leftrightarrow m \geq 2$

Proposition 2: Soit $f: (E_1, T_1) \rightarrow (E_2, T_2)$ est C^0 et $A \subset E_1$ convexe alors $f(A) \subset E_2$ aussi.

Preuve

Soit $g: f(A) \rightarrow \{0,1\}$ continue.

Alors par composition, $g \circ f: A \rightarrow \{0,1\}$ est continue, donc constante puisque A est convexe, donc g est constante!

Exo M_q S^m est convexe $\Leftrightarrow m \geq 1$ (pense à la projection orthogonale sur S^m)

cela reste vrai si l'on prend \mathbb{R}^m d'un mb dénombrable (> 0) de points

Corollaire:

\mathbb{R}^2 n'est pas homéomorphe à \mathbb{R} .
dim d'un espace \neq dim + 1

Ces particularités (thm de valeurs intermédiaires) si $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ (III.21)
est continue et si $A \subset E$ est connexe, alors $f(A) \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

Corollaire (de la proposition) si (E_1, τ_1) et (E_2, τ_2) sont homéomorphes, alors
 E_1 est connexe ssi E_2 est connexe.

Proposition si $A \subset E$ est connexe et si $A \subset B \subset \bar{A}$ alors B est connexe.
En particulier, A connexe $\Rightarrow \bar{A}$ connexe.

(Plus fort que ce qu'on avait vu lt à l'heure: $A \text{ cpa} \Rightarrow \bar{A}$ connexe)

Preuve Soit f une fonction C^0 sur B . Alors elle l'est sur A . Comme A
est connexe f est cste sur A , donc elle l'est sur l'adhérence
de A dans B (unicité du prolongement par continuité) qui est
 B (y médite...)

Rappelant qu'on a parlé d'espaces connexes, on peut parler de
composantes connexes d'espaces quelconques:

Def Soit (E, τ) un et. On définit sur E une relation par:
 $x R y \Leftrightarrow$ il existe $A \subset E$ connexe contenant x et y .
C'est une relation d'équivalence, dont les classes sont
appelées les composantes connexes de E .

Exo Vérifier la transitivité!

Proposition Si $x \in E$, la composante connexe C_x de E contenant x est:

$$C_x = \bigcup_{\substack{C \text{ connexe} \subset E \\ C \ni x}} C \quad (*)$$

C_x est donc la plus grande partie connexe de E contenant x .
De plus C_x est fermé.

Preuve $(*)$ est connexe (cf corollaire p. III 20)

de plus $C_x \subset \bar{C}_x$ qui est connexe et contient x , donc $C_x = \bar{C}_x$, i.e. C_x est fermé. III.22

Rq (i) un et (E, \mathcal{T}) non vide est connexe ssi il ne possède qu'une c.c.

(ii) En général, les cc ne sont pas des ouverts, par exemple si $(E, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, 1.1)$, les cc de E sont les intervalles, qui ne sont pas ouverts (exo).

(iii) Si A est une partie ouverte et fermée qui contient x , alors $C_x \subset A$. En effet $C_x \cap A$ est une partie ouverte et fermée de C_x , qui est connexe, donc $C_x \cap A = C_x$.

(iv) Si une composante connexe C_x intersecte un connexe C , alors $C_x \subset C$.

III.23

Exercice Si $f: (E_1, \mathcal{T}_1) \rightarrow (E_2, \mathcal{T}_2)$ est un homéo, montrez que

$$\forall x \in E_1, f(C_x) = C_{f(x)}$$

et que la correspondance ainsi définie entre les cc de E_1 et celles de E_2 est un homéo (pour les topologies quotient).

Proposition Le produit d'espaces topologiques est connexe ssi chacun de ces espaces est connexe.

Preuve 1) Si $E = \prod_{i \in I} E_i$ est connexe, alors $\forall i \in I, E_i = \pi_i(E)$ (projection sur le i^e facteur) est connexe comme image d'un connexe par une application continue.

2) On montre la réciproque du leçon en I à 2 élts, ce qui donne par récurrence le cas où I est fini.

Soient (E_1, \mathcal{T}_1) et (E_2, \mathcal{T}_2) deux espaces connexes. Soient $x = (x_1, x_2)$

et $y = (y_1, y_2) \in E$.

L'application $E_1 \rightarrow E$ est continue, donc son image $\{x_1\} \times E_2$
 $z \mapsto (x_1, z)$

est un connexe de E qui contient x . Ainsi $\{x_1\} \times E \subset C_x$, et en particulier $(x_1, y_2) \in C_x$. Par un argument similaire, $E_1 \times \{y_2\}$ est un connexe de E qui contient (x_1, y_2) donc intersecte C_x , donc d'après la rq (iv), $E_1 \times \{y_2\} \subset C_x$, donc $(y_1, y_2) \in C_x$.

Donc E est connexe. \square

On voit bien que cet argument ne marche pas dans le cas I infini...

exercice Cherchez la preuve dans la référence de votre choix.

Proposition Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evm et $A \subseteq E$ un ouvert (non vide)

Alors les cc de A sont ouvertes et fermées dans A , et sont connexes par arcs. En particulier, A est connexe ssi A est connexe par arcs.

Preuve Soit $x \in A$ et considérons $C'_x = \{y \in A \mid x \text{ est relié à } y \text{ par un chemin ds } A\} \cap A$

Alors (i) C'_x est ouvert dans A (ou dans E , c'est pareil!). En effet, si $y \in C'_x$, $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(y, \varepsilon) \cap A$ (car A ouvert). Tout $z \in B(y, \varepsilon)$ est relié à y par un chemin, donc à x aussi, donc $B(y, \varepsilon) \subset C'_x$.

(ii) C'_x est fermé dans A (mais pas forcément dans E). En effet, par le m argument, si $y \in A \setminus C'_x$ et si $\varepsilon > 0$ est tel que $B(y, \varepsilon) \cap A$, alors $B(y, \varepsilon) \subset A \setminus C'_x$.

Comme C'_x est connexe (car connexe par arcs) et contient x , $C'_x \subset C_x$.
Mais aussi $C_x \subset C'_x$ car C'_x est ouvert et fermé dans A (cf 19 p.

Etude d'un exemple détaillé : le Cantor triadique.

Il ya d'autres notions associées :

- locale connexité
- simple connexité ...

Thm du passage des données (cf TD)