§4. Connexité

On a déjà vu la connexité par arcs. On la définit pareil pour les e.t. généraux. On va maintenant introduire une autre notion de connexité :

Définition : On dit qu'un e.t. (E,τ) est connexe si E et $\emptyset$ sont les seuls sous-ensembles de E qui soient à la fois ouverts et fermés. On dit qu'un sous ensemble $A\subset E$ est connexe si (A,τ_A) est un e.t. connexe

En d'autres termes (et c'est peut être plus parlant), un e.t (E,τ) est connexe s'il n'existe pas de décomposition de la forme $E = V_1 \cup V_2$ où V_i sont des ouverts (ou des fermés !) non vides disjoints. On ne peut pas décomposer E en 2 "morceaux" disjoints, E est en un seul morceau.

Quelle est la différence avec l'autre notion de "en un seul morceau" que nous avions vue ? On va le voir juste après cette caractérisation

Proposition : L'e.t (E,τ) est connexe ssi toute application continue $f : E \to \{0,1\}$ (muni de la topo discrète) est constante

Preuve Si $f : E \to \{0,1\}$ est continue, $E = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$ est une partition de E en deux ouverts disjoints. Si E est connexe, on a donc $f^{-1}(\{0\})$ ou $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ donc f est constante.

Inversement, si $E = V_1 \cup V_2$ avec V_1, V_2 ouverts non vides disjoints, on définit f sur E par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in V_1 \\ 1 \text{ si } x \in V_2 \end{cases}$. Alors f est continue (cf continuité sur des sous ensembles ouverts) et f est non constante. □

On en déduit

Proposition : Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe

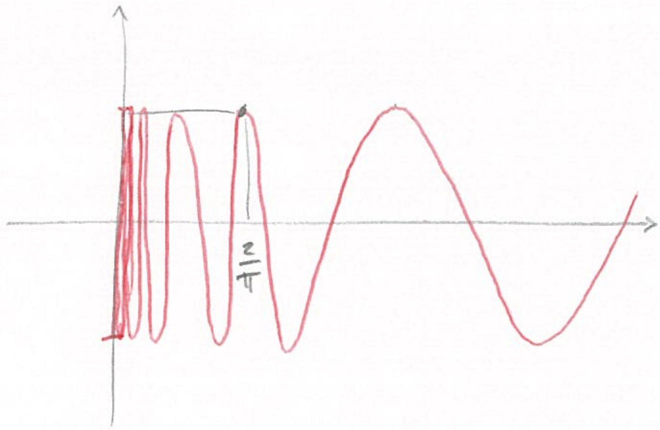
Preuve Soit E un ensemble connexe par arcs et $f : E \to \{0,1\}$ une application continue. Alors $f(E)$ est connexe par arcs (cf chap 2), or $\{0,1\}$ ne l'est pas donc $f(E) = \{0\}$ ou $\{1\}$, donc f est constante. Ainsi E est connexe.

(ça nous donne donc plein d'exemples de connexes (boules dans evn convexes))

⚠ La réciproque est fausse. Le contre-exemple ultra classique est le suivant : $A = \{0\} \times [-1,1] \cup \text{graphe}\left(x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in \mathbb{R}_+^*\right)$

$\cap$
$(\mathbb{R}^2, \|\ \|_{eucl})$

ça ressemble à :



Pourquoi est-ce connexe ? Soit f une fonction continue sur cet ensemble, à valeurs dans $\{0,1\}$. $Gr(...)$ est connexe par arcs (car image de $\mathbb{R}_+^*$ c. par arcs, par une appli C^0 : $\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto (x, \sin(\frac{1}{x}))\end{array}$) donc f est constante sur ce graphe.

De plus, tout point de $\{0\} \times [-1,1]$ est limite d'une suite d'élts de Gr (dans $\mathbb{R}^2$ donc dans (A, τ_A)) donc par continuité, la valeur de f en un tel pt est celle de f sur le graphe, et finalement f est constante. Donc A est connexe.

Rq En fait on a montré un résultat général : l'adhérence d'un ensemble connexe par arcs est connexe. (on va voir + général)
Par contre, pas nécessairement c.p.a.

Pourquoi n'est-ce pas connexe par arcs ? Supposons qu'il existe un arc continu γ joignant $\underset{\gamma(0)}{\left(\frac{2}{\pi}, 0\right)}$ à un point de $\{0\} \times [-1,1]$ dans A. Quitte à raccourcir γ, $\underset{(0,y_0)}{\text{}}$
on peut supposer $\gamma_1(t) > 0$ $\forall t \in [0,1[$ (où $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$). On a alors $\lim\limits_{t \to 1} \gamma_1(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to 1} \gamma_2(t) = y_0$. Montrons un fait contradictoire :

Affirmation $\forall \delta > 0$ $\gamma_2([1-\delta, 1[) = [-1,1]$ tout entier

- $\gamma_1(1-\delta) > 0$ et $\underbrace{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right)_{k \in \mathbb{N}}}_{u_k}$ et $\underbrace{\left(\frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right)_{k \in \mathbb{N}}}_{v_k}$ tendent vers 0 donc

$\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\quad 0 < u_N < v_N < \gamma_1(1-\delta)$

- $\gamma_1(t) \underset{t \to 1}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists t_0 > 1-\delta$ tq $0 < \gamma_1(t_0) < u_N < v_N < \gamma_1(1-\delta)$

Alors $\gamma_2([1-\delta, 1[) \supset \gamma_2([1-\delta, t_0]) = f(\gamma_1([1-\delta, t_0])) \underset{\text{TVI}}{\supset} f([u_N, v_N]) \underset{\text{TVI encore}}{\cup} [f(v_N), f(u_N)] = [-1,1]$

Donc $\gamma_2(t)$ n'a pas de limite qd $t \to 1$.

En revanche, pour les ouverts d'un evn on a équivalence entre connexe et connexe par arcs. On verra ça qd on aura vu les composantes connexes.

Bien sûr encore une fois la connexité dépend bcp de la topo considérée. III.20

- Si E est muni de la topo grossière, tt sous ensemble de E est connexe
- Si E ______________ discrète, les seuls sous-ensembles connexes non vides de E sont les singletons.

Revenons un instant à $\mathbb{R}$. Les intervalles sont cpa donc connexe. Qu'en est-il de la réciproque ? On a vu qu'elle est vraie pour cpa, elle l'est aussi pour connexe.

↳ **Prop** | Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, les sous-ensemble connexes sont exactement les intervalles.

Reste à montrer qu'un ens. connexe est un intervalle. Par contraposée, si A n'est pas un intervalle, A n'est pas convexe, donc $\exists a<b \in A$ et $c \in A^c$ tq $a<c<b$. Mais alors $A \cap]-\infty, c[$ et $A \cap]c, +\infty[$ sont des ouverts non vides disjoints de A dont la réunion est A ! Donc A n'est pas connexe.

Un corollaire qui servira souvent : le seul ss ensemble non vide ouvert et fermé d'un intervalle est lui même. Qd on utilise ça on appelle ça un argument de connexité.

Exemple : cf III.20 bis (?)

De retour à la situation générale, pour mq un ensemble est connexe on peut avoir recours à :

Proposition 1 : Soient A et B deux ensembles connexes non disjoints. Alors $A \cup B$ est connexe.

Preuve : exercice

⚠ On ne peut rien dire de l'intersection

Corollaire (i) Si $(A_i)_{i\in I}$ sont des connexes et $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe

(ii) dans le cas dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit de supposer $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.

exo Mq $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe $\Leftrightarrow n \geq 2$

cela reste vrai si l'on prive $\mathbb{R}^n$ d'un nb dénombrable (>0) de points

Corollaire : $\mathbb{R}^2$ n'est pas homeomorphe à $\mathbb{R}$. Plus dur en dim + grde !

Proposition 2 Si $f : (E_1, T_1) \to (E_2, T_2)$ est C^0 et $A \subset E_1$ connexe alors $f(A) \subset E_2$ aussi.

Preuve

Soit $g : f(A) \to \{0,1\}$ continue.

Alors par composition, $g \circ f : A \to \{0,1\}$ est continue, donc constante puisque A est connexe, donc g est constante !

Exo Mq S^n est connexe $\Leftrightarrow n \geq 1$ (pensez à la projection orthogonale sur S^n).

Cas particulier (thm des valeurs intermédiaires) Si $f:(E,\tau)\to\mathbb{R}$ est continue et si $A\subset E$ est connexe, alors $f(A)\subset\mathbb{R}$ est un intervalle.

Corollaire (de la proposition) Si (E_1,τ_1) et (E_2,τ_2) sont homéomorphes, alors E_1 est connexe ssi E_2 est connexe.

Proposition Si $A\subset E$ est connexe et si $A\subset B\subset\bar{A}$ alors B est connexe.
En particulier, A connexe $\Rightarrow$ $\bar{A}$ connexe.

(Plus fort que ce qu'on avait vu tt à l'heure : A cpa $\Rightarrow$ $\bar{A}$ connexe)

Preuve Soit f une fonct° C^0 sur B. Alors elle l'est sur A. Comme A est connexe f est cste sur A, donc elle l'est sur l'adhérence de A dans B (unicité du prolongement par continuité) qui est B (y méditer...)

Maintenant qu'on a parlé d'espaces connexes, on peut parler de composantes connexes d'espaces quelconques :

Déf Soit (E,τ) evn.et. On définit sur E une relat° par :
$x R y \iff$ il existe $A\subset E$ connexe contenant x et y
C'est une relation d'équivalence, dont les classes sont appelées les composantes connexes de E.

Exo Vérifier la transitivité !

Proposition Si $x\in E$, la composante connexe C_x de E contenant x est :

$$C_x=\bigcup_{\substack{C \text{ connexe} \subset E\\ C\ni x}} C \qquad (*)$$

C_x est donc la plus grande partie connexe de E contenant x.
De plus C_x est fermé.

Preuve $(*)$ est connexe (cf corollaire p. III 20) et contient x donc $(*)\subset C_x$
C_x est connexe et contient x donc $C_x\subset(*)$, ce qui montre l'égalité, et $(*)$ est manifestement la + gde partie connexe de E contenant x.

De plus $C_x \subset \overline{C_x}$ qui est connexe et contient x, donc $C_x = \overline{C_x}$, ie C_x est fermé. □

III.22

Rq (i) un et $(E,\mathcal{T})$ non vide est connexe ssi il ne possède qu'une c.c.

(ii) En général, les cc ne sont pas des ouverts. Par exemple si $(E,\mathcal{T}) = (\mathbb{Q}, |\cdot|)$, les cc de E sont les singletons, qui ne sont pas ouverts (exo).

(iii) Si A est une partie ouverte et fermée qui contient x, alors $C_x \subset A$. En effet $C_x \cap A$ est une partie ouverte et fermée de C_x, qui est connexe, donc $C_x \cap A = C_x$

(iv) Si une composante connexe C_x intersecte un connexe C, alors $C_x \supset C$

---

cf III.23

Exercice Si $f : (E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$ est un homéo, montrer que

$$\forall x \in E_1, \; f(C_x) = C_{f(x)}$$

et que la correspondance ainsi définie entre les cc de E_1 et celles de E_2 est un homéo (pour les topologies quotient)

Proposition Un produit d'espaces topologiques est connexe ssi chacun de ces espaces est connexe.

Preuve 1) Si $E = \underset{i\in I}{\times} E_i$ est connexe, alors $\forall i \in I$, $E_i = \pi_i(E)$ (projection sur le i^e facteur) est connexe comme image d'un connexe par une application continue.

2) On montre la réciproque ds le cas où I a 2 élts, ce qui donne par récurrence le cas où I est fini.
Soient $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces connexes. Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in E$.
L'application $\begin{array}{l} E_1 \longrightarrow E \\ z \longmapsto (x_1, z) \end{array}$ est continue, donc son image $\{x_1\} \times E_2$ est un connexe de E qui contient x. Ainsi $\{x_1\} \times E \subset C_x$, et en particulier $(x_1, y_2) \in C_x$. Par un argument similaire, $E_1 \times \{y_2\}$ est un connexe de E qui contient (x_1, y_2) donc intersecte C_x, donc d'après la rq (iv), $E_1 \times \{y_2\} \subset C_x$, donc $(y_1, y_2) \in C_x$.

Donc E est connexe. □

On voit bien que cet argument ne marche pas dans le cas I infini...

exercice Chercher la preuve dans la référence de votre choix.

Proposition Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $A \subset E$ un ouvert (non vide)

Alors les cc de A sont ouvertes et fermées dans A, et sont connexes par arcs. En particulier, A est connexe ssi A est connexe par arcs.

Preuve Soit $x \in A$ et considérons $C'_x = \{y \in A \mid x \text{ est relié à } y \text{ par un chemin ds } A\} \subset A$

Alors (i) C'_x est ouvert dans A (ou dans E, c'est pareil!). En effet, si $y \in C'_x$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $B(y,\varepsilon) \subset A$ (car A ouvert). Tout $z \in B(y,\varepsilon)$ est relié à y par un chemin, donc à x aussi, donc $B(y,\varepsilon) \subset C'_x$.

(ii) C'_x est fermé dans A (mais pas forcément dans E). En effet par le m̂ argument, si $y \in A \setminus C'_x$ et si $\varepsilon > 0$ est tel que $B(y,\varepsilon) \subset A$, alors $B(y,\varepsilon) \subset A \setminus C'_x$.

Comme C'_x est connexe (car connexe par arcs) et contient x, $C'_x \subset C_x$.
Mais aussi $C_x \subset C'_x$ car C'_x est ouvert et fermé dans A (cf 19 p.

Etude d'un exemple détaillé : le Cantor triadique.

Il y a d'autres notions associées :

- locale connexité
- simple connexité ...

Thm du passage des douanes (cf TD)