Affirmation : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers $x_\infty = \prod_{i\in I} x_\infty^{(i)}$

La preuve est similaire à ce qui précède : Soit $\varepsilon>0$ et $k\in\mathbb{N}$ tq $2^{-k}<\varepsilon$

(x_n^i) cv vers x_∞^i pour tout $i\in[\![1,k]\!]$ donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tq

$\forall n\geq N$, $\forall i\in[\![1,k]\!]$, $d_i(x_n^{(i)}, x_\infty^{(i)})<\varepsilon$

Mais alors $\forall n\geq N$, $d(x_n,x_\infty) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i}\dfrac{d_i(x^i_n, x^i_\infty)}{1+d_i(x^i_n,x^i_\infty)}$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} 2^{-i}\underbrace{\frac{d_i(\ )}{1+d_i(\ )}}_{<\varepsilon}}_{<\varepsilon} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{+\infty} 2^{-i}\frac{d_i(\ )}{1+d_i(\ )}}_{\leq 2^{-k}<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

Ce qui prouve la convergence. □

On aurait aussi pu montrer que toute suite de E possédait une sous-suite convergente en utilisant le procédé d'extraction diagonale de Cantor

(B) Compacité et continuité, application à la séparation des compacts/fermés

Proposition Soient $(E_1,\mathcal{T}_1)$, $(E_2,\mathcal{T}_2)$ des e.t séparés et $f : E_1\to E_2$ une application continue. Si $A\subset E$ est compact, $f(A)\subset E_2$ est compact.

Démonstration Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$ dans E_2.

Alors $A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} \underbrace{f^{-1}(U_i)}_{\text{ouverts}}$. Comme A est compact, $\exists\, i_1\dots i_m\in I$ tq $A\subset \bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}(U_{i_j})$

Mais alors $f(A)\subset f\left(\bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}(U_{i_j})\right) = \bigcup_{j=1}^{m} f(f^{-1}(\ )) = \bigcup_{j=1}^{m} U_{i_j}$

et on a trouvé un sous rec. ouvert de $f(A)$. □

Application

Proposition Soit (E,d) un e.m et $A\subset E$ un sous ensemble compact. Alors $\forall x\in E$, $\exists a\in A$ tq $d(x,A)=d(x,a)$

Dem La fonction $\varphi : A \to \mathbb{R}_+$, $y\mapsto d(x,y)$ est continue (lipschitzienne) sur un compact donc son image est un compact. φ admet donc un minimum sur A : $\exists a\in A$ tq $d(x,a) = \min_{y\in A} d(x,y) = d(x,A)$

Rq Si E est un evn de dimension finie, le résultat reste vrai si on suppose seulement A fermé et non vide. En effet, $\forall R > dist(x,A)$,

$$dist(x,A) = dist(x, \underbrace{A \cap \overline{B}(x,R)}_{\text{compact!}})$$

⚠ faux en dim infinie. Essayer de trouver un contre exemple ac tout ce qu'on a vu jusqu'ici

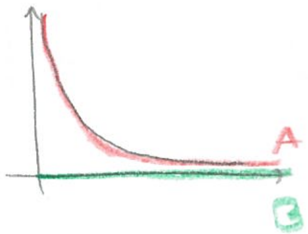
On montre également :

Proposition Si (E,d) est un e.m et si $A,B \subset E$ sont des compacts non vides, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tq $d(a,b) = dist(A,B)$.

En particulier, si $A \cap B = \emptyset$, $dist(A,B) > 0$

Rq à nouveau, si E est un evn de dimension finie, on a le même résultat si A est fermé et B compact. En revanche si A et B sont seulement fermés, on peut avoir $A \cap B = \emptyset$ et $dist(A,B) = 0$

Exemple $B = [0,+\infty[\times \{0\}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0 \text{ et } xy=1\}$



Def Si (E,d) est un e.m et $A \subset E$ alors $\forall \varepsilon > 0$ on définit le ε-voisinage (ouvert) de A par :

$$A_\varepsilon = \{x \in E \mid dist(x,A) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B(a,\varepsilon)$$

Corollaire Si $A,B \subset E$ sont compacts (non vides) et disjoints, alors

$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$ si $\varepsilon \leq \frac{1}{2} dist(A,B)$

(On avait déjà vu qu'on pouvait séparer les compacts dans n'importe quel espace topologique)

En fait, on peut aussi séparer par des ouverts des fermés disjoints :

Prop Soit (E,d) un e.m. et $A,B \subset E$ des fermés disjoints. Alors il existe des ouverts V_A, V_B tq $A \subset V_A$, $B \subset V_B$ et $V_A \cap V_B = \emptyset$

Dem On se place dans le cas $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ (sinon évident)

On considère la fonction continue $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{dist(x,A)}{dist(x,A) + dist(x,B)}$$

(le dénominateur ne s'annule pas car A et B sont des fermés disjoints)

On pose alors $V_A = f^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[)$ et $V_B = f^{-1}(]\frac{1}{2}, +\infty[)$. $\square$

Bilan On peut : . séparer les fermés disjoints dans un espace métrique,

- séparer les compacts disjoints dans un espace séparé.
- dans un e.m, $\mathrm{dist}(x, A)$ est atteinte $\forall x$ si A compact
- dans un evm df $\mathrm{dist}(x, F)$ est atteinte $\forall x$ si F fermé

(espaces normaux ci-dessous)

Un dernier thm sur les appli C^0 sur un compact :

Thm Soit $f : (E, d_E)$ e.m compact $\longrightarrow (F, d_F)$. Si f est continue, f est uniformément continue.

(Généralisation du thm de Heine)

Preuve (Avec les sous-suites cv)

Supposons que f n'est pas UC^0. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (x_n, y_n) \in E^2$ tq $\underbrace{d_E(x_n, y_n) < \frac{1}{n}}_{(*)}$ mais $\underbrace{d_F(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon}_{(**)}$

$((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de $(E\times E, d\times d)$, qui est compact, donc elle admet une sous-suite convergente $((x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de limite $(x_\infty, y_\infty) \in E\times E$

Mais par passage à la limite dans $(*)$ (à justifier !), $d_E(x_\infty, y_\infty) = 0$,

i.e. $x_\infty = y_\infty =: l$

Mais alors par continuité de f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = f(l)$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_F(f(x_n), f(y_n)) = d_F(l, l) = 0$, contradiction avec $(**)$

Exo le faire avec la caractérisation BL des compacts.

Application. Continuité des intégrales à paramètres.

Espaces normaux

Def un et est dit normal s'il est séparé et si deux fermés disjoints sont contenus dans des ouverts disjoints

Corollaire de ci-dessus : Les e.m et les et. compacts sont normaux.

Application Thm d'extension de Tietze Urysohn : Si $(E, \mathcal{T})$ est un et normal, $A \subset E$ un fermé et $f : A \to \mathbb{R}$ une appli continue, alors il existe un prolongement continu $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ ayant les mêmes inf et sup que f