§4. Compacité

Dans tout ce paragraphe, $(E,\mathcal{T})$ désigne un espace métrique séparé

Ⓐ Définition(s) et propriétés

Déf. Si $A \subset E$, on dit qu'une famille $(V_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de A si, $\forall i \in I$, $V_i \in \mathcal{T}$ et $A \subset \bigcup_{i\in I} V_i$. On dit que ce recouvrement est fini si I est fini.

Déf. On dit qu'un sous-ensemble A de E est compact s'il a la propriété de Borel Lebesgue : de tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Si $A=E$, on dit que l'e.t $(E,\mathcal{T})$ est compact

Si $(V_i)_{i\in I}$ est un rec. ouvert de A, $\exists \{i_1,\dots,i_m\} \subset I$ tq $A \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m}$

Rq1 Si $(E,\mathcal{T})$ n'est pas séparé et possède la propriété de Borel-Lebesgue, on dit parfois que $(E,\mathcal{T})$ est quasi-compact.

Rq2 Nous avions défini les espaces métriques compacts comme étant ceux qui ont la propriété de Bolzano-Weierstrass : de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente. On va voir que pour les espaces métriques, B-L et B-W sont équivalentes, mais que ce n'est pas le cas en général. Avant cela on va présenter des propriétés générales sur les e.t. compacts. On a déjà vu des applications de la compacité aux fonctions continues, et on en verra bien d'autres au chap. 4.

ex $[0,1[$ n'est pas un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$. En effet, $\left(]-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement ouvert de $[0,1[$ mais on ne peut pas en extraire un sous. rec. fini

Exo - toute union finie de s.-ens compacts est compacte. (En particulier tout ensemble fini est compact)

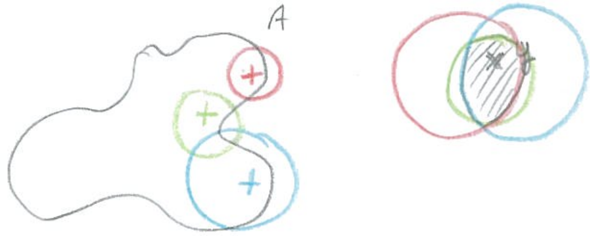
- $A \subset E$ est un s.ens compact $\Leftrightarrow$ l'e.t $(A, \underset{\text{topo induite}}{\mathcal{T}_A})$ est compact. (en t.e.t / un e.t)

Rq Si $\hat{\tau}$ est + fine que τ, $\hat{\tau}$ possède + d'ouverts et de fermés que τ, mais moins de compacts ! En particulier,

- Si τ = topo discrète, compact $\Leftrightarrow$ fini
- Si τ = — grossière (Δ pas séparé) tout $A \subset E$ possède la prop de B-L

Proposition Si $A \subset E$ est compact alors A est fermé dans (E, τ)

Preuve Il s'agit de démontrer que ${}^cA$ est ouvert. Si $A = E$ il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $A \neq E$ et soit $y \in {}^cA$. Il s'agit de trouver un ouvert contenant y et disjoint de A.



Or E étant séparé, $\forall x \in A$, $\exists V_x$ vois ouvert de x, W_x — y tq $V_x \cap W_x = \emptyset$

$(V_x)_{x \in A}$ fournit un recouvrement ouvert de A. Il possède donc un sous recouvrement fini par compacité $(V_{x_i})_{i \in \{1, \dots, m\}}$, ac $x_i \in A$ $\forall i$.

Or $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$ est disjoint de $W = \bigcap_{i=1}^{m} W_{x_i}$ $\left(V \cap W = \bigcup_{i=1}^{m} (V_{x_i} \cap W) \subset V_{x_i} \cap W_{x_i} = \emptyset \right)$

donc $A \subset V$ aussi, et W est un vois ouvert de y comme intersection finie de vois ouverts. $\square$

Exo Mq si A et B sont compacts et disjoints dans E séparé, il existe des ouverts disjoints V, W tq $A \subset V$ et $B \subset W$
"séparation des compacts". (cf. TD pour les espaces métriques)

Proposition : Si $A \subset E$ est compact et $B \subset A$ est fermé (pour τ ou τ_A !) Alors B est compact
"Un fermé d'un compact est un compact"

Preuve exo

Prop : La propriété de B-L pour un e.t. (E, τ) est équivalente à : pour tte famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ d'intersection vide, il existe $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ tq $\bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} = \emptyset$

Preuve exo, par passage au complémentaire

Corollaire "Une suite de compacts emboîtés non vides a une limite non vide".
Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des compacts non vides tq $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_n \dots$
Alors $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset$

Rq Ce n'est pas vrai en général si on enlève l'hyp de compacité !
ex $A_n = [n, +\infty[$, $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \emptyset$ (fermés mais non bornés)
$A_n =]0, 1/n[$ (bornés mais non fermés)

C'est bien pratique pour montrer notamment que certains ensembles d'accumulation sont non vides :

Proposition Si $A \subset E$ est compact, alors toute suite dans A possède un point d'accumulation dans A.

⚠ On n'a pas encore dit une sous-suite convergente. On a vu qu'en topo générale un pt d'accum. n'était pas tjs limite d'une sous-suite.
Ceci dit on se rapproche de l'équivalence B-L ⟺ B-W dans les métriques

Preuve Soit $u \in A^{\mathbb{N}}$. On a vu que $Vd(u) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\overline{\{u_k, k \geq m\}}}_{B_m}$

or $\forall n$, B_m est fermé, inclus dans A compact donc compact, non vide,
et $B_{m+1} \subset B_m$. Par le corollaire ci-dessus $Vd(u)$ est donc non vide (et $\subset A$). □

Voici donc l'équivalence :

Proposition Pour tout ss ens A d'un espace métrique (E, d),
A satisfait B-L ⟺ A satisfait B-W

On a déjà BL ⟹ existence d'une valeur d'adh. de A et comme dans un espace métriq une Vd est limite d'une sous suite, on a B-W.

Il ne reste donc plus qu'à montrer B-W ⟹ B-L. Pour cela il suffit de se restreindre au cas où $A = E$ tt entier, en considérant la topo induite (A, τ_A) et la distance induite (A, d_A).

On va en fait transiter par une autre propriété équivalente qui nécessite une nouvelle définition

Def Un espace métrique (E,d) est précompact si pour $\forall \varepsilon>0$, E admet un recouvrement fini par des boules de rayon ε.

Thm Pour un espace métrique (E,d) les 3 prop suivantes sont équivalentes

(i) (E,d) satisfait B-L

(ii) (E,d) satisfait B-W

(iii) (E,d) est complet et précompact

On a déjà vu (i) $\Rightarrow$ (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) On a déjà vu ds le chap 2 que BW $\Rightarrow$ complet

Si E n'est pas précompact, il existe $\varepsilon>0$ tq aucune famille finie de boules de rayon ε ne recouvre E. On peut alors construire par récurrence une suite (x_n) tq $(*)_m$ $d(x_i,x_j)\geq\varepsilon$ $\forall i<j\leq m$.

Une telle suite n'a aucune valeur d'adhérence

(si $d(x_N,a)<\frac{\varepsilon}{2}$ pour un certain a, alors $d(x_m,a)\geq\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall m>N$)

Donc E n'est pas compact.

(iii) $\Rightarrow$ (i) C'est une généralisation du thm de Heine Borel qui prouve ce résultat pour $E=\mathbb{R}$.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de E. On suppose qu'il n'admet pas de sous recouvrement fini. On construit par récurrence une suite de Cauchy (x_n) de la façon suivante.

On recouvre E par une union finie de boules fermées de rayon 1 (précompacité). Comme (U_i) n'admet pas de sous recouvrement fini, au moins l'une de ces boules n'admet pas de sous-rec par les U_i.

On la note B_0 et on appelle x_0 son centre.

$B_0 \dots B_m$ étant construites (B_k de rayon 2^{-k}) (ainsi que $x_0 \dots x_m$), de sorte que $B_j\cap B_{j+1}\neq\emptyset$ et B_j ne admette pas de ss rec fini par les $(U_i)_{i\in I}$,

On recouvre E par un nb fini de boules de rayon $2^{-(m+1)}$ et on ne garde que celles qui rencontrent B_m. Alors par récurrence l'une d'elle n'a pas de sous rec fini et on l'appelle B_{m+1}

Par construction (exo) $d(x_m,x_{m-1})<2^{-m}+2^{-m+1}$ donc la suite est de Cauchy, donc elle converge (E complet) vers a, qui appartient à un U_i, donc $\exists\,\varepsilon>0$ tq $B(a,\varepsilon)\subset U_i$. Mais alors pour m assez gd,

$d(a,x_m)+2^{-m}<\varepsilon$ donc $B(x_m,2^{-m})\subset B(a,\varepsilon)\subset U_i$ ce qui contredit le fait que B_m n'admette pas de ss rec fini. $\square$

On s'intéresse enfin aux produits d'espaces compacts :

Théorème de Tychonoff Un produit $E = \prod_{i \in I} E_i$ d'espaces topologiques compacts est compact.

Rq La réciproque est vraie : si un produit d'e.t est compact, les facteurs sont compacts. En effet, si E est compact, il est séparé. On a vu qu'alors les E_i sont séparés. Mais alors $E_i = \pi_i(E)$ (π_i proj canonique sur le facteur E_i), image d'un compact par une appli C^0 à valeurs dans un espace séparé. E_i est donc compact.

Preuve de Tychonoff dans le cas où les E_i sont métrisables et I est dénombrable.

On traite le cas $I = \mathbb{N}^*$ et on laisse le cas fini au lecteur.

- On a vu que si d_i étaient des distances définissant la topo des E_i

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}$$ définissait une distance sur E définissant la topo produit.

(En particulier E est métrisable donc séparé). Pour montrer la compacité de E il suffit donc de montrer que E est complet et précompact.

- précompacité : Soit $\varepsilon > 0$ donné et soit $m \in \mathbb{N}$ tq $2^{-m} < \varepsilon$

Chaque X_i, $i \leq m$, est recouvert par un nb fini de d-boules de rayon ε $\{B_i^j\}_{j=1 \text{ à } k_i}$. Pour $j = (j_1, \dots, j_m) \in \underbrace{[\![1,k_1]\!] \times \dots \times [\![1,k_m]\!]}_{\text{ensemble fini}}$, $R_j := \prod_{i=1}^m B_i^{j_i}$

Ces rectangles recouvrent $\prod_{i=1}^m E_i$.

Les $R_j \times \prod_{i>m} E_i$ maintenant recouvrent E. Or chacun est inclus dans une d-boule de rayon 2ε. En effet, si $x_1 \dots x_m$ sont les centres des facteurs de R_j et pour n'importe quel $(x_k)_{k>m}$, $\forall y \in R_j \times \prod_{i>m} E_i$,

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} 2^{i} \underbrace{\frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}}_{\leq d_i(x_i,y_i) < \varepsilon}}_{< \varepsilon} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{+\infty} 2^{-i} \underbrace{\frac{\quad}{\quad}}_{\leq 1}}_{2^{-n} < \varepsilon}$$

Donc E est recouvert par un nb fini de d-boules de rayon 2ε.

- Complétude Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. Alors (l'écrire !) $\left(\pi_i(x_n) = x_n^{(i)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E_i, donc converge car E_i est compact donc complet. Notons $x_\infty^{(i)}$ sa limite.