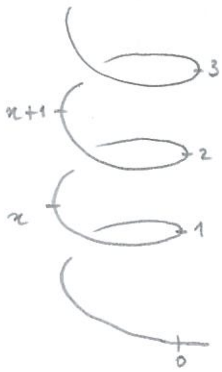
(B) Topologie quotient, topologie image

Soit (E,τ) un espace topologique et R une relation d'équivalence sur E.
On cherche à munir $E/_R$ d'une topologie naturelle. Une fois encore, il y a deux façons de le faire :

ex :



E = copie de $\mathbb{R}$ en forme de spirale, muni de la topo usuelle de $\mathbb{R}$.

R : $x R y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = y + k$

autrement dit ici :

$x R y \Leftrightarrow$ x et y appartiennent à la m̄ droite verticale.

$E/_R =: \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$. Etant donné $x \in \mathbb{R}$, on note $\bar{x}$ sa classe dans $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$, ie sa classe modulo 1.

On a envie de dire que $\bar{y}$ est voisin de $\bar{x}$ s'il existe un représentant de $\bar{y}$ ds $\mathbb{R}$ qui est proche de x, donc qu'un ens. V est un voisinage de $\bar{x}$ si $\pi^{-1}(V)$ est un vois de x, où $\pi : E \longrightarrow E/R$, $y \longmapsto \bar{y}$ est la proj. canon., et donc qu'un ens. V est un ouvert de $E/_R$ si $\pi^{-1}(V)$ est un ouvert de E. Ça définit bien une topo. Plus généralement :

Déf Soit (E,τ) un espace topo et $f : E \to X$ une application.

$$\tau_f = \{ V \subset X \mid f^{-1}(V) \text{ ouvert de } (E,\tau) \}$$

est une topologie sur X, appelée topologie image de τ par f.

Preuve : exercice

Prop. La topologie image de τ par f est la topologie la plus fine qui rende f continue.

Preuve : immédiate

Prop : La topologie image est caractérisée par la propriété suivante :
Pour toute appli. $\bar{\varphi} : (E/_R, \tau_f) \longrightarrow (X, \tau_X)$, avec (X,τ) e.t. qq,
$\bar{\varphi}$ est continue ssi $\varphi = \bar{\varphi} \circ f : (E,\tau) \longrightarrow (X,\tau_X)$ est continue.

Preuve • La topologie image a cette propriété :
- si $\bar{\varphi}$ est continue, alors par composition $\varphi = \bar{\varphi} \circ f$ l'est
- si $\bar{\varphi} \circ f$ est continue, soit U ouvert de (X,τ_X). $(\bar{\varphi} \circ f)^{-1}(U)$ est un ouvert de (E,τ) et c'est $f^{-1}(\bar{\varphi}^{-1}(U))$ dc par def des ouverts de $E/_R$, $\bar{\varphi}^{-1}(U)$ en est un.
Donc $\bar{\varphi}$ est continue.

- il existe une unique topologie satisfaisant cette propriété. (même preuve que pour la topo produit)

Déf Soit (E,τ) un e.t. et R une relation d'équivalence sur E. On appelle topologie quotient sur E/R la topologie τ_R image de τ par la projection canonique $\pi : E \to E/R$.

C'est donc la topologie la + fine tq π soit continue.

C'est aussi la topologie caractérisée par : $\forall (X,\tau_X)$ topologique, $\forall \varphi : E/R \to X$,
$\bar{\varphi} : (E/R, \tau_R) \to (X,\tau_X)$ est $C^0 \iff \bar{\varphi} \circ \pi : (E,\tau) \to (X,\tau_X)$ est continue

Tout ceci est très formel, mais c'est simplement une façon de formaliser l'idée de "collage" :

<u>ex</u> Prenons le segment $[0,1]$ et "recollons" les 2 extrémités. Si on pense à $[0,1]$ comme un fil, on recolle les extrémités et on obtient une courbe fermée, que l'on peut déformer en un cercle.

Mathématiquement, on a pris $[0,1]$ muni de la topo usuelle, et on a considéré la relation d'éq définie par : $\forall x \in]0,1[$, $x \sim x$ et rien d'autre

- $0 \sim 1$ (et bien sûr $0\sim0$, $1\sim1$, $1\sim0$)

L'intuition ci-dessus se reformule mathématiquement par :

" $[0,1]/_\sim$ est homéomorphe à un cercle (muni de sa topologie usuelle) "

Comment construire un tel homéo :

l'appli $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $x \longmapsto e^{2i\pi x}$ est bien définie et

passe au quotient $(x \sim y \overset{(*)}{\Rightarrow} \varphi(x) = \varphi(y))$ donc induit une application $\bar{\varphi} : [0,1]/_\sim \longrightarrow S^1$

comme φ est surjective, $\bar{\varphi}$ l'est (exo)

comme $(*)$ est une équivalence, $\bar{\varphi}$ est injective.

Comme φ est continue $\bar{\varphi}$ l'est.

Reste à montrer que $\bar{\varphi}^{-1}$ est continue. Cela va être automatique car $[0,1]/_\sim$ est compact (cf homéo et compacité dans le chap 2)

Mais on n'a pas encore défini la compacité en général. Le moment est venu de le faire.

et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$??

Exercice Montrer que $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ (de l'exemple initial) est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$. (Là aussi la compacité aide!)

C'est un cas particulier d'une construction générale : le quotient d'un espace topologique par l'action d'un groupe, que les magistériens vont voir en complément.

Vous avez vu les actions de groupe en algèbre : une act° d'un gr G sur un ens X est une appli
$$G \times X \longrightarrow X \qquad (g, x) \longmapsto g.x$$
satisfaisant :
- $e_G . x = x \quad \forall x \in X$
- $\forall g, g' \in G, \forall x \in X, \quad (gg').x = g.(g'.x)$

(Ie revient directement que $\forall g \in G$, l'appli $\varphi_g : X \longrightarrow X$, $x \longmapsto g.x$ est une bijection d'inverse $\varphi_{g^{-1}}$, et que $\varphi_{gg'} = \varphi_g \circ \varphi_{g'}$

Autrement dit on a un morphisme de groupes

$\varphi . \quad (G, *) \longrightarrow (\mathrm{Bij}(X), \circ)$. On peut aussi définir une action de G sur X comme un tel morphisme de groupes)

On peut alors considérer $X/_G$ l'espace des orbites de l'action :

Une orbite est un ensemble $\underbrace{\{g.x,\ g \in G\}}_{[x]}$ pour un $x \in X$ donné.

On a une appli naturelle $X \longrightarrow X/_G$, $x \longmapsto [x]$

Si X est en + un espace topologique, on peut munir $X/_G$ de la topologie quotient (la rel. d'equiv. ici est " appartenir à une même orbite")

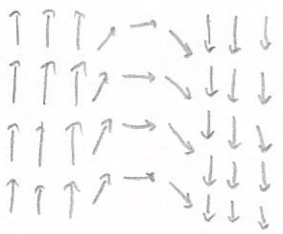
Dans l'exemple précédent, $(X, \tau) = (\mathbb{R}, |.|)$, $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ et l'action est l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translations : $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(k, x) \longmapsto k + x$

Exercice** $(X, \tau) = (\mathbb{U}, \tau_{\text{usuelle}})$, $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$

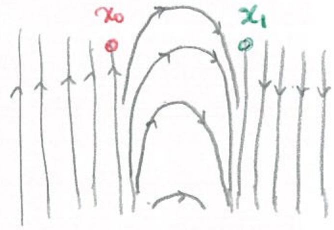
action : $\mathbb{Z} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$, $(k, z) \longmapsto e^{i\alpha} z$ $\quad (\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\})$

Vérifier que $\mathbb{S}^1/_{\mathbb{Z}}$ est non dénombrable et que pour cette action, la topologie quotient sur $\mathbb{S}^1/_{\mathbb{Z}}$ est la topologie grossière

On termine avec un exemple lié à l'étude qualitative des EDO (que vous verrez plus tard). On considère un chp de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ qui a l'allure suivante :



Il a pour courbes intégrales / orbites :



On définit l'espace $\mathcal{O}$ des orbites de ce chp de vecteurs comme l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation "appartenir à la même orbite" (notée $\sim$), muni de la topologie quotient.

On a une surjection canonique $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{O} = \mathbb{R}/\sim$

$x \longmapsto$ orbite de $x =: [x]$

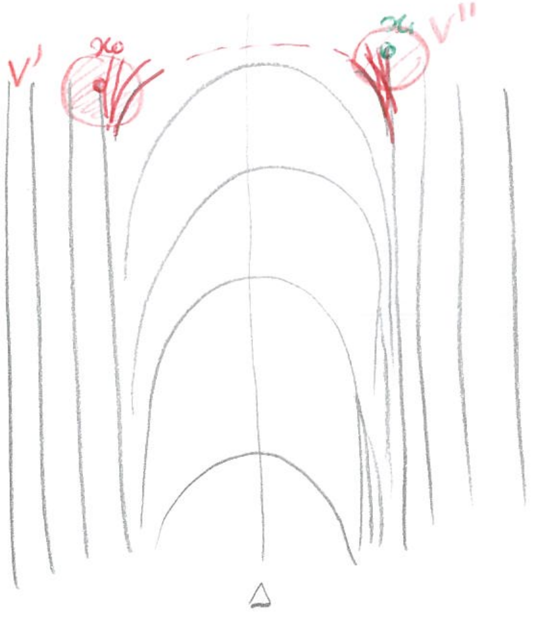
(En fait ce quotient est aussi l'espace des orbites d'une action de groupe sur $\mathbb{R}^2$, mais cette fois le groupe est $\mathbb{R}$)

Question : quelle est la topologie de l'espace quotient ?

On pourrait en dire bcp de choses mais on va simplement voir qu'il n'est pas séparé :

Soient x_0 et x_1 comme sur le dessin ci-dessus et montrons que la topo quotient sur $\mathcal{O}$ ne sépare pas $[x_0]$ et $[x_1]$.

Soit V_0 un voisinage ouvert de x_0. Cela signifie que $\pi^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ qui contient $\pi^{-1}([x_0])$, droite verticale passant par x_0. C'est un ouvert donc il contient un vois ouvert V' de x_0. Mais il est de la forme $\pi^{-1}(\ldots)$ donc dès qu'il contient un point, il contient toute son orbite ! Or les orbites à droite de x_0



passant par V' passent aussi par son symétrique V'' par rapport à Δ, arbitrairement près de x_1. Donc $\pi^{-1}(V)$ rencontre n'importe quel ouvert contenant x_1, donc $\pi^{-1}(W)$ pour W n'importe quel voisinage de $[x_1]$. Mais $\pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(W) = \pi^{-1}(V \cap W)$ donc $V \cap W \neq \emptyset$ $\forall$ vois V de $[x_0]$ et W de $[x_1]$, ce qu'on voulait montrer. $\square$