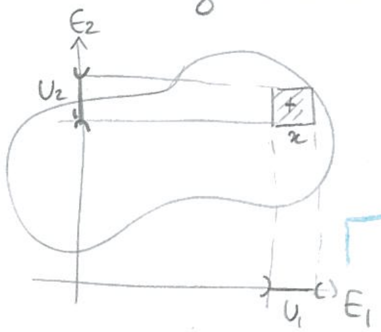
§ 3 : Fabriquer de nouvelles topologies

Pour les espaces métriques, on avait parlé de distance induite, de distance produit ... façons naturelles de définir de nouvelles distances sur des espaces fabriqués à partir d'espaces métriques. Ici on va voir des choses bcp + générales et notamment qqc qu'on n'aurait pas pu faire ac les distances : définir une topologie naturelle sur un quotient. Mais d'abord des ex + simples :

(A) topologie produit, topologie initiale/induite

- On a déjà vu la topo induite sur un sous-ensemble A d'un esp. topo (E,τ).
- Etant donnés des e.t. $(E_1,\tau_1), \dots, (E_n,\tau_n)$, et $x=(x_1 \dots x_n) \in E = E_1 \times \dots \times E_n$

on a envie de dire que V est un voisinage de x dans E si V contient un "rectangle ouvert" $U_1 \times \dots \times U_n$, où U_i ouvert de E_i contenant x_i



Eh bien ça définit bien une topologie ça !
La topologie produit τ_{prod} sur E :

Déf/prop La famille de rectangles ouverts

$$B = \{ U_1 \times \dots \times U_n \subset E \mid U_1 \in \tau_1, \dots U_n \in \tau_n \}$$

est stable par intersection finie, et forme donc la base d'une topologie τ sur E appelée topologie produit et notée $\tau_1 \times \dots \times \tau_n$

⚠ tout ouvert de τ_{prod} n'est pas un rectangle, mais une union (éventuellement ∞) de rectangles ouverts.

Ex Si $(E_1,d_1), \dots (E_n,d_n)$ sont des espaces métriques et $\tau_1 \dots \tau_n$ les topologies associées

la topologie produit sur $E_1 \times \dots \times E_n$ est associée à la métrique produit

$$d(x,y) = \max_{1 \le i \le n} (d_i(x_i,y_i)) \quad \text{si } \begin{array}{l} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{array} \in E_1 \times \dots \times E_n$$

Il s'agit de vérifier que ces 2 topos ont les mêmes ouverts.

La topologie τ_d est engendrée par les boules ouvertes de d qui sont des produits de boules ouvertes des E_i de même rayon

$$B_d(x,r) = \{ y \mid d(x,y) < r \} = \{ (y_1, \dots, y_n) / \forall i \in \{1..n\}, d_i(x_i,y_i) < r \}$$
$$= B_{d_1}(x_1,r) \times \dots \times B_{d_n}(x_n,r)$$

Il suffit de vérifier que ces rectangles ouverts engendrent également τ_{prod}, et pour cela de vérifier que $\forall$ rectangle ouvert $U_1 \times \dots \times U_m$ de E est union de rectangles de la forme ci-dessus.

Mais $U_1 = \bigcup_{i \in I_1} B_{d_1}(x_i^{(1)}, r_i^{(1)}), \dots, U_m = \bigcup_{i \in I_m} B_{d_m}(x_{i_m}^{(m)}, r_{i_m}^{(n)})$

Donc $U_1 \times \dots \times U_m = \bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in I_1 \times \dots \times I_m} B_{d_1}(,) \times \dots \times B_{d_n}(,)$.

Maintenant il faut encore montrer qu'un "rectangle" est une union de "carrés"... □

On aurait pu définir la topo produit autrement : On veut qu'une application $\varphi : X \to E$ (quel que soit X topologique) soit continue ssi chacune de

(*) ses composantes $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$, où $\pi_i : E_1 \times \dots \times E_n \to E_i$ projection canonique sur le i^e facteur, est continue. En particulier, vu que (!) $id_E : E \to E$ est continue, (!) on veut que chacune des proj. soit continue.

Mais on veut aussi que (!) $\forall i \in \{1 \dots n\}$, $\forall (x_1 \dots \hat{x_i}, \dots x_n) \in E_1 \times \dots \times \hat{E_i} \times \dots \times E_n$, l'injection $E_i \to E$, $x \mapsto (x_1, \dots x_{i-1}, x, x_{i+1} \dots x_n)$ soit continue. (puisque les composantes de cette appl sont C^0 car constantes ou id)

Proposition Caractérisation Il existe une unique topologie qui satisfasse (*) : c'est la topologie la moins fine pour laquelle les π_i sont continues, et elle coïncide avec la topologie produit telle que définie ci-avant.

Rq "La topologie la moins fine tq..." a un sens. C'est un cas particulier de topologie initiale.

Déf Soit E un ensemble et $\mathcal{F}$ une famille d'applications de E vers des espaces topologiques. On définit la topologie τ sur E engendrée par la prébase $\mathcal{B} = \{ f^{-1}(U),\ f : E \to (F, \tau_F)$ élt de $\mathcal{F}$ et U ouvert de $F \}$

C'est la topologie la moins fine qui rende les applications de $\mathcal{F}$ continues. On l'appelle topologie initiale associée à $\mathcal{F}$ sur E.
induite par $\mathcal{F}$

Preuve Toute topologie qui rend les appl. de $\mathcal{F}$ continues doit contenir $\mathcal{B}$, donc τ. Comme τ fait partie de cet ens. de topologies, $\tau = \bigcap_{\substack{\tau' \text{ topologies} \\ \text{rendant les} \\ f \in \mathcal{F} \text{ continues}}} \tau'$, + petit élt de l'ens des topos unique.

(Sans exhiber de base, on peut garantir que l'ensemble T des topos qui rendent les $f \in \mathcal{F}$ continues est non vide (topo discrète) et stable par intersection donc admet un ppélt.)

Avant de revenir au produit, notons la cohérence du vocabulaire : (III 10)

Si (E,τ) est un e.t. si $A \subset E$ et $\imath : A \longrightarrow E$ l'inclusion canonique, la topologie induite sur A est la topologie | induite par $\imath$ / initiale associée à $\imath$ | sur A.

En effet, $\tau_\imath$ est engendrée par (en fait est égale à) $\{\imath^{-1}(U),\, U \text{ ouvert de } E\} = \underbrace{\{A \cap U,\, U \text{ ouvert de } E\}}_{\tau_A}$

Prop La topo initiale $\tau_{\mathcal{F}}$ est caractérisée par la propriété suivante :
Une application $\varphi : (X,\tau_X) \longrightarrow (E,\tau_{\mathcal{F}})$ est continue ssi $f \circ \varphi$ l'est pour $\forall f \in \mathcal{F}$.

Cela veut dire (i) que $\tau_{\mathcal{F}}$ a cette propriété
(ii) que c'est la seule

Preuve (i) Soit $\varphi : (X,\tau_X) \to (E,\tau_{\mathcal{F}})$.
- Si φ est continue, comme les appli de $\mathcal{F}$ aussi, par composition $f\circ\varphi$ l'est $\forall f \in \mathcal{F}$
- Supposons que $f\circ\varphi$ est C^0 $\forall f \in \mathcal{F}$. Soit V un élt de la prébase de voisin de $\tau_{\mathcal{F}}$: $\exists f : E \xrightarrow{\in\mathcal{F}} (F,\tau_F)$ et $U \in \tau_F$ tq $V = f^{-1}(U)$

Mais alors $(f\circ\varphi)^{-1}(U) = \varphi^{-1}(f^{-1}(U)) = \varphi^{-1}(V)$ est un ouvert de (X,τ_X) puisque $f\circ\varphi$ est continue.

Si c'est vrai $\forall V \in$ prébase, c'est vrai $\forall$ V ouvert, donc φ est C^0.

Donc $\tau_{\mathcal{F}}$ a la propriété universelle.

(ii) Supposons que 2 topologies τ_1 et τ_2 satisfassent la prop. univ.

Alors $\forall f : E \to (F,\tau_F) \in \mathcal{F}$, f est continue de (E,τ_1) dans (F,τ_F) et de (E,τ_2) dans (F,τ_F)

(car $f = f \circ id$ et id est continue pour la m topo à la source et au but)

Mais alors $id : (E,\tau_1) \to (E,\tau_2)$ satisfait $\forall f : E \to (F,\tau_F)$ appartenant à $\mathcal{F}$, $f\circ id : (E,\tau_1) \to (F,\tau_F)$ est continue, donc par la prop univ satisfaite par τ_2, id est C^0 de (E,τ_1) ds (E,τ_2). ça nous dit que $\tau_2 \subset \tau_1$. Réciproquement, $\tau_1 \subset \tau_2$. □

Concernant la topo produit, il nous reste juste à vérifier que la topo initiale sur $E = E_1 \times \dots \times E_n$ associée aux projections (qui est aussi la topo la moins fine qui rende les π_i continues, ou encore l'unique topo τ qui satisfasse la propriété universelle : $\forall \varphi : (X,\tau_X) \to (E,\tau)$, φ $C^0 \Leftrightarrow \varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ C^0 $\forall i$) est la topo produit.

La 1ère a pour prébase l'ensemble des rectangles ouverts particuliers de la forme $\pi_i^{-1}(U_i)$ avec U_i ouvert de E_i

$$\pi_i^{-1}(U_i) = E_1\times\cdots\times E_{i-1}\times U_i\times E_{i+1}\times\cdots\times E_m$$

alors que la seconde a pour prébase l'ensemble de tous les rectangles ouverts $U_1\times\cdots\times U_m$, U_i ouvert de E_i.

Mais les seconds sont des intersections finies de rectangles du 1er type :

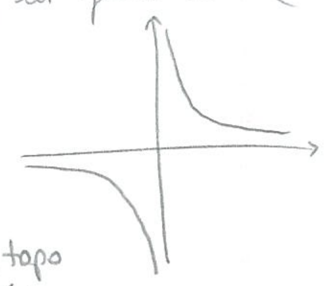
$$U_1\times\cdots\times U_m = (U_1\times E_2\times\cdots\times E_n)\cap(E_1\times U_2\times E_3\times\cdots\times E_n)\cap\cdots\cap(E_1\times\cdots\times E_{n-1}\times U_m)$$

Donc cette prébase définit la m̂ topo !

Remarque Avec la topologie produit, les projections sont non seulement continues mais ouvertes : Si $V\in\tau$, $\pi_i(V)\in\tau_i$ $\forall i\in\{1\ldots m\}$.

En effet, fixons i et prenons $x_i\in\pi_i(V)\subset E_i$. $\exists x\in V$ tq $x_i=\pi_i(x)$. Comme V est ouvert, il contient un rectangle ouvert (base) $W=W_1\times\cdots\times W_m$ contenant x. Mais alors $\pi_i(V)$ contient $\pi_i(W)=W_i\ni x_i$ donc $\pi_i(V)$ est un voisinage de x_i. C'est un vois. de chacun de ses pts dc un ouvert. □

⚠ Les projections canoniques ne sont en général pas fermées : $(E_1,\tau_1)=(E_2,\tau_2)=(\mathbb{R},|.|)$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / xy=1\}$ est fermé dans $(\mathbb{R}^2,\tau_\times)$ mais $\pi_1(A)=\mathbb{R}^*$ n'est pas fermé dans $(\mathbb{R},|.|)$.



Rq Prop Une suite $x:\mathbb{N}\to E=E_1\times\cdots\times E_n$ converge pour la topo produit ssi ses composantes $x_i=\pi_i\circ x:\mathbb{N}\to X_i$ convergent.

(On aurait pu vouloir prendre ça comme prop caractéristique de la topologie produit mais on a vu qu'en général, la convergence des suites ne suffit pas à décrire une topologie qd celle ci n'est pas à bdv.)

Preuve exercice

Exercice Vérifier l'associativité $\tau_1\times(\tau_2\times\tau_3)=(\tau_1\times\tau_2)\times\tau_3=\tau_1\times\tau_2\times\tau_3$
(le pb est de comprendre ce qu'il faut vérifier ...)

Cas des produits infinis

$$E = \prod_{i \in I} E_i = \{ x = (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in E_i \quad \forall i \in I \}$$

(Cas particulièrement intéressant : $I = \mathbb{N}$)

Cette fois-ci on prend comme base non pas les rectangles mais parmi eux les cylindres ouverts (et cette fois ce n'est pas la même chose) :

$$\mathcal{B} = \{ V = \prod_{i \in I} V_i \mid V_i \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in I \text{ et } V_i = E_i \text{ sauf pour un nb fini de } i \}$$

La proposition / caractérisation dans le cas fini reste valable : pour ce qui est des résultats sur la topo initiale on n'a jamais supposé la famille d'appli. finie, donc il nous reste simplement à vérifier que la topo initiale associée aux $f_i : E \to E_i$ est la m̄ que la topo ci dessus, ce qui se fait comme dans le cas fini.

Dans le cas d'espaces métriques, on a :

Prop Si $(E_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont des espaces métriques et si $E = \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i$, la topo produit est associée à la distance $d(x,y) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} \dfrac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$

pour $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E$.

Dans le cas non dénombrable en revanche, la topologie produit n'est pas nécessairement métrisable. Ex : $I = \mathbb{R}$, $(E_i, \mathcal{T}_i) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\forall i \to E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

(Une suite (f_n) cv dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{prod}) \iff (f_n)$ cvs sur $\mathbb{R}$)

Cet espace n'est pas métrisable car il n'est pas à base dénomb. de voisinages. En effet, soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Supposons que f admet une bdv $V_0 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$

Chaque V_i contient un cylindre contenant f et en particulier constitue un ensemble $G_i = \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } g_{|J_i} = f_{|J_i} \}$ avec J_i ens fini.

Prenons $J = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ $\quad \{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } g_{|J} = f_{|J} \} \subset \bigcap V_i$

Mais il y a là-dedans des fonctions différentes de f, J étant dénombrable et $\mathbb{R}$ non ! Ceci contredit la déf de base de voisinages

(Si $V_0 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ est une bdv de x, $\bigcap_{i=0}^{+\infty} V_i = \{x\}$)

Donc f n'a pas de bdv.

En fait un produit non dén d'espaces ayant ts au moins 2 points n'est pas à bases dénombrables de voisinages et n'est donc jamais métrisable.

Revenons à la proposition :

Preuve • Exo : vérifier que d définit bien une distance sur E.

• Si $V \in \mathcal{T}$ est non vide et si $x \in V$, il existe un cylindre de la forme $W = W_1 \times \cdots \times W_m \times E_{m+1} \times E_{m+2} \times \cdots$ tq $x \in W \subset V$. Si $r>0$ est suffisamment petit, $B_d(x,r) \subset W$ car :

$$B_d(x,r) \subset B_{d_0}\left(x_0, \frac{r}{1-r}\right) \times B_{d_1}\left(x_1, \frac{2r}{1-r}\right) \times \cdots \times B_{d_n}\left(x_n, \frac{2^n r}{1-2^n r}\right) \times E_{n+1} \times \cdots \times E_{m+k} \cdots$$

Ainsi V est un ouvert pour $\mathcal{T}_d$, donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_d$

• Inversement, si $x \in E$ et $r>0$, on choisit $m \in \mathbb{N}$ tq $\sum_{i=m+1}^{+\infty} 2^{-i} = 2^{-m} \leq r/2$

et on pose $W_i = B_{d_i}\left(x_i, \frac{r}{2(n+1)}\right)$ pour $i = 0, \ldots, m$. On vérifie alors que

$W = W_0 \times \cdots \times W_m \times E_{n+1} \times \cdots \subset B_d(x,r)$ donc $B_d(x,r) \in \mathcal{T}$, et a fortiori $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}$. □

Proposition $\prod_{i \in I} E_i$ est séparé $\Leftrightarrow$ $\forall i \in I$, E_i est séparé.

Preuve : $\Rightarrow$ Soient $x_j \neq y_j \in E_j$ et soient $x, y \in E$ tq $\pi_j(x) = x_j$ et $\pi_j(y) = y_j$ et $\pi_i(x) = \pi_i(y)$ $\forall i \neq j$

E étant séparable, $\exists$ U_x et U_y voisins disjoints de x et y dans E.
Comme $\mathcal{B}$ est une base de la topologie produit sur E, U_x et V_y sont des réunions de cylindres. En particulier il existe V_x et V_y cylindres ouverts disjoints contenant respectivement x et y :

$$V_x = \prod_{i \in I} V_x^i, \quad V_y = \prod_{i \in I} V_y^i$$

Pour $i \neq j$, V_x^i et V_y^i sont des ouverts contenant tous deux x_i donc non disjoints. Donc $V_x \cap V_y = \emptyset \Rightarrow V_x^j \cap V_y^j = \emptyset$, et cela nous donne les voisinages ouverts disjoints de x_j et y_j recherchés.

$\Leftarrow$ Soient $x \neq y \in E$. Alors il existe $j \in I$ tq $x_j \neq y_j$. Comme E_j est séparé, $\exists$ U_j et V_j voisins disjoints de x_j et y_j resp.

Alors $U_j \times \prod_{\substack{i \neq j \\ i \in I}} E_i$ et $V_j \times \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} E_i$ fournissent des voisinages ouverts disjoints de x et y. □