§2. Limites et continuité

Def Soit (E,τ) un e.t. On dit qu'une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $a \in E$ dans (E,τ) si : $\forall V$ voisin de a, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in V$.

Prop Si (E,τ) est séparé, un tel a, s'il existe, est unique, et on note
$$a = \lim_{n\to+\infty} x_n$$

Preuve Revoir la preuve dans le cas métrique.

Rq 1) Dans les espaces non séparés, c'est faux en général. Typiquement pour la topologie grossière, toute suite converge vers toute limite ! (l'écrire)

2) Dans la def, on peut remplacer "$\forall$ voisin de a" par "pour tout élt V d'une base de voisinages de a" (le vérifier !)

3) Pour la topologie discrète, une suite cv ssi elle est constante à partir d'un certain rang (l'écrire !)

1) et 3) montrent en particulier que la cv d'une suite dépend drastiquement de la topologie donnée !

Prop (fermés et suites) Soit (E,τ) un espace topo et $A \subset E$.
Si A est fermé alors toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui cv dans E a ses limites dans A

(cf. annonce du chap. antérieur !)

Preuve revoir celle des espaces métriques

⚠ La réciproque est fausse en général ; un espace pour lequel on a équivalence est dit "séquentiel". "A base dén de voisins" ⇒ "séquentiel". (cf ci-dessous) (la réciproque n'est pas vraie)

Ex non séquentiel $(\mathbb{R}, \tau_{\text{codenombrable}})$ (une suite cv là-dedans ssi elle est stationnaire donc tt ss ens de $\mathbb{R}$ est séquentiellement stable, mais évidemment pas fermé)

Prop "à base dén. de voisins ⇒ séquentiel" :
Si (E,τ) est à bdv, tt ss ens $A \subset E$ stable par passage à la limite de suites est un fermé

Preuve Comme dans les espaces métriques : par contraposée.

Supposons que A n'est pas fermé, ie que A^c n'est pas ouvert.

Alors $\exists x \in A^c$ tq $\forall$ vois V de x, $V \cap A \neq \emptyset$. En particulier, pour une base $\{V_n\}$ de vois de x*, $\forall n$, $\exists x_n \in V_n \cap A$. Mais alors $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $x \notin A$: en effet, $\forall$ élt V_N d'une base de voisinages de x, il existe un rg (N) tq $\forall n \geq N$, $x_n \in V_n \subset V_N$. □

(* : on peut toujours supposer une telle base décroissante pour l'inclusion en remplaçant V_n par $\bigcap_{k=1}^{n} V_k$, qui fournit encore une base de voisinages)

Une autre situation où il va falloir se méfier de la caractérisation séquentielle c'est pour l'adhérence (cf III 6 bis), puis pour les fonctions continues.

Déf Soit $f : (E, \tau_E) \longrightarrow (F, \tau_F)$

1) On dit que f est continue en $a \in E$ si $\forall V$ vois de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un vois. de a

2) ______________ sur E si f est continue en tt point de E.

Proposition $f : E_1 \to E_2$ est continue ssi $\forall U$ ouvert de F, $f^{-1}(U)$ ouvert dans E.

Preuve adapter la preuve des espaces métriques.

Rq comme $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ il est équivalent de demander que $\forall A$ fermé de F, $f^{-1}(A)$ est un fermé de E.

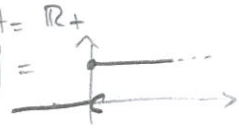
(*) cf III 6 ter

Proposition Si $f : (E, \tau_E) \to (F, \tau_F)$ est continue en tt pt de $A \subset E$ et si τ_A est la topo induite par τ_E sur A, alors $f_{|A} : (A, \tau_A) \to (F, \tau_F)$ est continue. La réciproque est vraie si A est un ouvert de E

Preuve du sens direct : cf espaces métriques

preuve de la réciproque si A est ouvert : Soit $a \in A$ et V un voisinage ouvert de $f(a)$. Alors $f_{|A}^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de a dans A, mais un ouvert de A est un ouvert de E inclus dans A, donc $f^{-1}(V) \supset f_{|A}^{-1}(V)$ voisinage ouvert de a dans E. Donc f est continue en a. □

⚠ Faux en général si A n'est pas ouvert dans E. Ex $E = F = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}_+$, $f =$



$f_{|A}$ est continue (car constante), mais f n'est pas continue en $0 \in A$.

(suites et adhérence)

Proposition Soit (E,τ) un e.t., $A \subset E$ et $x \in E$ — III.6 bis

(i) si $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$ avec $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ alors $x \in \overline{A}$.

(ii) si $x \in \overline{A}$ et si τ admet une "bdv" en x alors $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

Rq Dans les espaces métriques, tout point avait une bdv, donc on avait

$$x \in \overline{A} \iff \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq } x = \lim_{n\to+\infty} x_n$$

Mais ce n'est pas vrai en général.

Preuve de (i) voir espaces métriques

Preuve de (ii) (ne pas la faire car on a déjà fait les fermés)

Soit $x \in \overline{A}$ et soit $V_0 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ une bdv de x. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \cap A \neq \emptyset$ donc on peut trouver $(x_n) \in V_n \cap A$. La suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ ainsi construite cv vers x (cf précédemment). □

contre-exemple si on enlève "bdv" : dans $(\mathbb{R}, \tau_{coden})$ l'adhérence séquentielle d'un ensemble est lui même puisque toute suite convergente est stationnaire mais l'adhérence topo de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ne peut pas être lui même puisqu'il n'est pas fermé !

(sous-suites et valeurs d'adhérence)

Une autre situation où il faut se méfier des critères séquentiels :

On définit comme ds les espaces métriques les valeurs d'adhérence d'une suite :

$$a \in V.A(u) \iff \forall V \text{ voisin de } a,\ \#\{n \in \mathbb{N},\ u_n \in V\} = +\infty$$

On a toujours

(i) $V.A(u) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k, k \geq n\}}$ (en particulier c'est un fermé)

(ii) si il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ qui cv vers a alors $a \in V.A(u)$.

(iii) si $a \in V.A(u)$ et si τ possède une bdv en a alors il existe une ss suite (u_{n_k}) qui cv vers a.

Preuve(s) Exercice

↳ et trouver un c-ex à (iii) si on enlève l'hyp sur la bdv.

Continuité et restriction

Déf Soit (E,τ) un e.t. et $A \subset E$. La famille
$$\tau_A = \{ B \cap A,\ B \in \tau \}$$
est une topologie sur A, appelée topologie induite

Preuve exo

Exemple Si (E,d) est un espace métrique, $A \subset E$ et d_A distance induite par d sur A, on a vu que $\boxed{\tau_{d_A} = \tau_A}$

Cas général Si A est un ouvert, B est un ouvert de $A \Leftrightarrow B$ est un ouvert de E inclus dans A

Si A est un fermé, — fermé ———— fermé ————

Avant Continuité et intérieur / adhérence :

Prop Soit $f : (E, \tau_E) \to (F, \tau_F)$ C^0. Alors $\forall A \subset E$,
$$\overset{\circ}{\left(f^{-1}(A)\right)} \supset f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \quad \text{et} \quad \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$$

Preuve exercice
↳ trouver également des exemples où les inclusions sont strictes.

Proposition ("continuité $\Rightarrow$ continuité séquentielle") Si $f : (E, \tau_E) \to (F, \tau_F)$ est continue, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E qui cv vers a dans (E, τ_E), $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers $f(a)$ dans (F, τ_F)

La réciproque est vraie si τ_E admet une base dén. de voir. en tt pt

Preuve du sens direct : comme dans $\mathbb{R}$. L'avait-on fait ?

Preuve de la réciproque dans le cas à "bdv" : supposons que f n'est pas continue. Alors $\exists a \in E$ et V vois de $f(a)$ dans F tq $f^{-1}(V)$ n'est pas un vois de a. Si $V_0 \supset \dots \supset V_m \dots$ est une bdv de a, $\forall m$, $\exists x_n \in V_m \cap (f^{-1}(V))^c$. Alors (x_m) cv vers a (puisque $\{V_m\}$ bdv de a) mais $\forall m$, $f(x_n) \notin V$ donc $(f(x_m)) \not\to f(a)$.

continuité séquentielle $\not\Rightarrow$ continuité en général : Prenons $E(\mathbb{R}, \tau_{coden})$. Une suite qui cv là-dedans est stationnaire donc toute application de E dans n'importe quoi est séq^t C^0. Mais si on pd par ex $\mathbb{1}_\mathbb{Q} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$, $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ qui n'est pas dénombrable donc pas fermé.

Comme pour les suites, la continuité d'une appli dépend énormément des topologies choisies :

- Si τ_E est la topo discrète sur E ou si τ_F est la topo grossière sur F toute application $E \to F$ est continue !
- Si τ_E est la topo grossière sur E et si F est séparé, les seules applications continues sont les constantes
- Si τ_F est la topologie discrète, les applications continues sont localement constantes.