Chapitre 3 : Topologie générale

§1. Définitions générales

Déf Soit E un ensemble. On appelle topologie sur E une famille τ de sous-ensembles de E vérifiant les propriétés suivantes :

1) ϕ et E appartiennent à τ
2) toute union d'éléments de τ appartient à τ.
3) toute intersection finie d'éléments de τ appartient à τ.

Le couple (E,τ) est appelé un espace topologique. Les éléments de τ sont appelés les ouverts de (E,τ) et leurs complémentaires les fermés de (E,τ)

Ex 1) Si (E,d) est un espace métrique on définit une topologie τ associée à la distance par :

$$\tau_d = \{ A \subset E \mid \forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B_d(x,r) \subset A \}$$

(Les éléments de τ sont les ouverts (au sens métrique du chap. 2) de E pour la distance d)

2) Si E est un ensemble qcq, $\tau = \{\phi, E\}$ est une topologie sur E, appelée topologie grossière. C'est la topo sur E qui contient le moins d'ouverts.

3) A l'opposé, $\tau = \mathcal{P}(E)$ est également une topologie sur E, appelée topologie discrète. C'est celle qui contient le plus d'ouverts. (On a vu que c'était la topo associée à la distance discrète δ sur E)

4) Entre les deux on a la topologie cofinie (qui coïncide ac la topo discrète si E est fini).

$$\tau = \phi \cup \{ A \subset E \mid A^c \text{ est un ensemble fini} \}$$

Les fermés sont donc E et ts les ss-ensembles finis de E.

Le premier exemple demeurera le + important pour ce cours, même si on évoquera les autres et qu'ils sont très importants dans divers champs des maths. Ce 1er ex motive la def suivante :

Déf Un espace topologique (E,τ) est dit métrisable s'il existe une distance sur E dont la topologie associée coïncide avec τ.

S'il y a une définition, il y a des contre-exemples, notamment la topologie grossière dès que $\#E \geq 2$ et la topologie cofinie dès que $\#E = +\infty$. Cela peut se voir à l'aide de la notion suivante :

Déf Soit (E,τ) un espace topologique et $x\in E$. On appelle voisinage de x (dans (E,τ)) tout sous-ensemble $V\subset E$ tel qu'il existe $A\in\tau$ (ie A ouvert) tq $x\in A\subset \tau$. En particulier un voisinage ouvert de x est simplement un $V\in\tau$ contenant x.

Rq comme dans les espaces métriques, $A\subset E$ est ouvert ssi c'est un voisinage de chacun de ses pts

Déf On dit qu'un esp. topo (E,τ) est séparé (au sens de Hausdorff) si deux points distincts de E ont toujours des voisinages disjoints (qu'on peut supposer ouverts)

$$\forall x,y\in E \text{ tq } x\neq y,\ \exists V_x, V_y\in\tau \text{ tq } x\in V_x,\ y\in V_y \text{ et } V_x\cap V_y=\phi.$$

Rq Tout espace métrisable est séparé : Soit d une distance associée à (E,τ) et soient $x,y\in E$, $x\neq y$. Alors $\varepsilon=d(x,y)>0$ et $V_x=B_d(x,\varepsilon/2)$ et $V_y=B_d(y,\varepsilon/2)$ conviennent.

$\boxed{\text{Oubli}}$ On a vu que dans un esp. métrique, tt singleton est fermé. C'est vrai + généralement dans un espace séparé. Ce n'est pas vrai en général. Prendre la topo grossière sur E de card ≥ 2.

En revanche • si $\#E\geq 2$, $(E,\tau_{grossière})$ n'est pas séparé : il existe x et y distincts dans E mais le seul vois. V_x de x dans (E,τ) est E, idem pour y, et ces 2 voisi. ne sont pas disjoints !

• Si $\#E=+\infty$, $(E,\tau_{cofinie})$ n'est pas séparé : 2 ouverts non vides ne sont jamais disjoints : si $V_1\cap V_2=\phi$, $V_1\subset V_2^c$ fini si V_2 ouvert, or tt ouvert est infini dc V_1 ne peut être ouvert.

On verra d'autres exemples très naturels d'espaces non séparés qd on parlera de topo quotient.

Comme on vient de le voir, on peut mettre sur un m ensemble quantité de topologies différentes. Il est naturel de les comparer :

Déf Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur un m ensemble E. Si $\tau_2\supset\tau_1$, on dit que τ_2 est plus fine que τ_1 (ou que τ_1 est moins fine que τ_2 ...)

(l'ensemble τ_2 est + gros, mais la topologie est + fine : elle contient + d'info. On verra le lien de ça avec la quantité d'applications continues de et vers (E,τ)).

Sur un ensemble E, la topo la moins fine est la topologie grossière, la + fine est la topologie discrète. Les topologies "intéressantes" se situent en général entre les deux.

Déf Soit (E,τ) un esp. topo. On dit qu'une partie $B\subset\tau$ est une base de la topologie τ si tt ouvert de τ est une réunion d'éléments de B. On dit alors que τ est engendrée par B.

Exemple 1 Si (E,d) est un espace métrique, la topologie $\mathcal{T}_d$ associée est engendrée par la famille des boules ouvertes (déjà vu)

Rq/exo Sur $E=\mathbb{R}$, la topo usuelle est engendrée par la famille dénombrable

$$\mathcal{B} = \{ \,]a,b[\mid a,b \in \mathbb{Q},\ a<b \}$$

Un espace topologique dont la topo est engendrée par une famille dénombrable est dit à base dénombrable (tout simplement)

en anglais : second-countable

first-countable / à base dénombrable de voisinages : si tout point de E possède une base de voisinages qui est dénombrable.

↳ Une base de voisinages d'un point $x \in E$ est une famille $\{V_i\}_{i\in I}$ de voisinages de x tq tout voisinage V de x contient l'un des V_i

Pour un e.t $(E,\mathcal{T})$, "à base dénombrable" $\Rightarrow$ "à base dénombrable de voisinages"

La réciproque est fausse en général mais on ne va pas accumuler les exemples tout de suite. (cf ci-dessous)

Contentons-nous de remarquer qu'il existe des e.t qui ne sont pas à base dénombrable de voisinage : ex la topologie cofinie sur un ensemble non dénombrable (exo)

Heureusement pour nous :

- Un espace discret est à base dénombrable de voisinages : $\forall x \in E$, $\{x\}$ est une base des vois. de x !
- Tout espace métrique est à base dénombrable de voisinages : $\forall x \in E$, $\quad \mathcal{B}_x = \{ B_d(x,\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}^* \}$ ... ! forme une base dém. de vois de x. qu'on a déjà considérée par le passé.
- par contre un espace métrique n'est pas nécessairement à base dénombrable

Contre exemple : l^∞, espace des suites réelles bornées, muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Pour le voir, commençons par observer que l^∞ possède une famille non dénombrable d'ouverts disjoints : $\{ B_{\|\cdot\|_\infty}(u,1),\ u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \}$

(si 2 suites de 0 et de 1 (dc bornées) sont distinctes, leurs termes d'ordre n, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, diffèrent de 1) Mais si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_\infty}$, $\mathcal{B}$ possède un élément contenu dans $B(u,1)$ pour chaque u. Donc $\mathcal{B}$ est non dénombrable !

Rq On verra qu'en revanche $C([0,1],\mathbb{R})$ est à base dénombrable. Ça peut sembler contre-intuitif car $[0,1]$ est bcp + gros que $\mathbb{N}$ mais la continuité est très importante ici, car justement elle n'autorise pas de passer aléatoirement de la valeur 0 à la valeur 1 comme pour les suites. (III.4)

Retour aux bases d'ouverts

Exemple 2 Si E est un ensemble et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ est une famille stable par intersection finie (y compris triviale $\to \mathcal{B}$ contient E) alors les unions d'éléments de $\mathcal{B}$ forment une topologie $\mathcal{T}$ sur E, la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

On peut aussi parler de topologie engendrée par une partie qcq $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$: C'est la topologie ayant pour base l'ensemble $\mathcal{B}$ des intersections finies d'élt de $\mathcal{F}$
(⚠ $\mathcal{F}$ ne forme alors pas une base d'ouverts, $\mathcal{B}$ si)

On continue avec les def générales.

Def Soit $(E,\mathcal{T})$ un e.t. et $A \subset E$

- On appelle intérieur de A le + gd ouvert inclus dans A. On le note tjs $\mathring{A}$.
- On appelle adhérence de A le + petit fermé contenant A. On le note tjs $\bar{A}$
- On appelle frontière de A l'ensemble $\partial A := \bar{A} \setminus \mathring{A}$

$(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$, $(\bar{A})^c = (\mathring{A^c})$, $\partial A^c = \partial A$,

$x \in \mathring{A} \iff A$ voisin de x

$x \in \bar{A} \iff \forall V$ voisin de x, $V \cap A \neq \emptyset$

$x \in \partial A \iff$ ———————, $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap A^c \neq \emptyset$

A ouvert $\iff \mathring{A} = A$

A fermé $\iff \bar{A} = A$

Tout ceci reste vrai. Il faudra se méfier en revanche des critères séquentiels (cf. § suivant)

Exercice Soit $(E,\mathcal{T})$ un e.t. et $A, B \subset E$

1) Si $A \subset B$, $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$
2) $(\overset{\circ}{\overline{A \cap B}}) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $(\overset{\circ}{\overline{A \cup B}}) \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$
3) $\overline{(A \cap B)} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
4) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$, $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$

Def A est dense si A intersecte tt ouvert non vide de $\mathcal{T}$.

On a toujours A dense $\iff \bar{A} = E \iff A^c$ est d'intérieur vide.