§ 9. Applications linéaires continues

Proposition Soit $f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ une application linéaire

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) f est continue
2) f est continue à l'origine
3) f est bornée sur la boule unité fermée
4) il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ tq $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E \quad \forall x \in E$
5) f est lipschitzienne.

Preuve 1) ⟹ 2) est immédiat

2) ⟹ 3) Supposons f continue à l'origine. Alors $\exists \delta > 0$ tq

Seul point important

$\forall x \in E, \quad \|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$ (puisque $f(0)=0$)

Mais alors si $\|x\|_E \leq 1$, $\|\delta x\|_E \leq \delta$ donc $\underbrace{\|f(\delta x)\|_F}_{= \delta \|f(x)\|_F} \leq 1$

Donc $\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\delta} \quad \forall x \in B_E(0,1)$ donc f est bornée sur $B_E(0,1)$

3) ⟹ 4) Supposons qu'$\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\|f(x)\|_F \leq M \quad \forall x \in B_E(0,1)$

Alors $\forall x \in E$, $\frac{x}{\|x\|_E} \in B_E(0,1)$ donc $\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq M$

ie $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq M$ ce qui donne ce qu'on veut.

4) ⟹ 5) Si 4 est vrai alors $\forall x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leq M \|x-y\|_E$

5) ⟹ 1) On a déjà vu que lipschitzienne ⟹ continue □

Proposition Si $\dim(E) < +\infty$, toute application linéaire $f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ est continue.

Preuve On a vu que $\|.\|_E$ était équivalente à $\|.\|_\infty$ pour une base $(e_1 - e_n)$ donnée donc il suffit de considérer ce cas.

Mais si $\|x\|_\infty \leq 1$

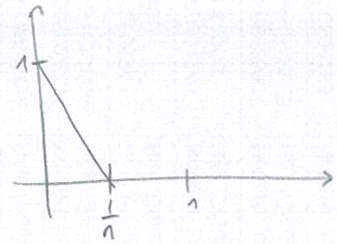
$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \right\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i|}_{\leq 1} \|f(e_i)\|_F \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F}_{\text{indep}^t \text{ de } x}$

donc f bornée sur la boule unité. □

Bien sûr ce n'est pas vrai si E est de dim ∞ :

Prenons $(E, \| \|_E) = (C([0,1],\mathbb{R}), \| \cdot \|_1)$ et $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(0)$ (forme linéaire)

Considérons la suite f_n $(n \geq 1)$:



$\varphi(f_n) = 1 \ \forall n$

mais $\|f_n\|_1 =$ aire du triangle $= \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$ donc (f_n) cv vers $\tilde{0}$ pour $\| \|_1$

et on n'a pas $\varphi(f_n) \longrightarrow \varphi(\tilde{0}) = 0$.

Déf Si f est une application continue de $(E, \| \|_E)$ dans $(F, \| \|_F)$, on définit la "norme d'opérateur" de f (associée aux normes $\| \|_E$ et $\| \|_F$) par
$$|||f||| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|f(x)\|_F$$
$< +\infty$ (puisque f est bornée sur la boule unité fermée par continuité)

Prop
$$|||f||| = \underbrace{\sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|f(x)\|_F}_{A} = \underbrace{\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}}_{B}$$
(si $\dim E \neq 0$)

Preuve Clairement $A \leq |||f|||$ (sup sur un ensemble plus petit)

En outre,
$$|||f||| = \sup_{\substack{x \in E \\ 0 < \|x\|_E \leq 1}} \|f(x)\|_F \leq \sup_{\substack{x \in E \\ 0 < \|x\| \leq 1}} \frac{\|f(x)\|_F}{\underbrace{\|x\|_E}_{\leq 1}} \leq B$$
(sup sur un ensemble plus petit)

Reste donc à montrer que $B \leq A$

Mais si $x \in E, x \neq 0$, en posant $y = \frac{x}{\|x\|_E}$, on a $\|y\|_E = 1$ et $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \|f(y)\|$

donc $B \leq \sup_{\|y\|_E = 1} \|f(y)\|_F = A$. $\square$

Par définition, $\|f(x)\|_F \leq |||f||| \cdot \|x\|_E \ \forall x \in E$ et $|||f|||$ est la plus petite constante pour laquelle cette inégalité est vraie.

Ex $(E, \| \|_E) = (C([0,1],\mathbb{R}), \| \|_\infty)$, $(F, \| \|_F) = (\mathbb{R}, |.|)$

$$\varphi : E \longrightarrow F$$
$$f \longmapsto f(0)$$

Cette appli lin est continue : $\forall f \in E, |f(0)| \leq 1 . \|f\|_\infty$

pour $f = \tilde{1}$, on a égalité. Donc 1 est la meilleure constante

$\rightarrow$ $|||\varphi||| = 1$

Proposition : L'application $\mathcal{L}_c(E,F) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (pour des normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ données)
$$f \longmapsto |||f|||$$
est une norme sur l'espace v. $\mathcal{L}_c(E,F)$ des appli lin C^0 de E ds F.

(On devrait noter $||| \; |||_{(E,\|.\|_E),(F,\|.\|_F)}$)

Preuve
- séparation : immédiat (le faire)
- homogénéité : aussi (par homogénéité de $\|.\|_F$)
- inégalité triangulaire : soient $f, g \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

$\forall x \in E$ tq $\|x\|_E = 1$, $\|(f+g)(x)\|_F = \|f(x)+g(x)\|_F \leq \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F$
$\leq |||f||| + |||g|||$

donc par passage au sup

$$|||f+g||| \leq |||f||| + |||g|||$$

Rq En dimension finie, le sup est atteint car f est C^0 et la boule unité fermée est compacte. Mais en général ce n'est pas le cas.

Ex Prenons $(E, \| \|_E) = \{ f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \}$ muni de $\|.\|_\infty$

et $(F, \|.\|_F) = (\mathbb{R}, |.|)$

et $T : E \longrightarrow F$
$$f \longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx$$

Alors $\forall f \in E$, tq $\|f\|_\infty \leq 1$, $|T(f)| = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx < 1$

car $|f(x)| \leq 1$ $\forall x$ et $|f(x)| < 1$ sur $\exists$ un intervalle au vois de 0 puisque f est nulle et continue en 0.

Donc $|||T||| \leq 1$. Mais ac $f_n =$  on a $T(f_n) \to 1$ ac $\|f_n\|_\infty \leq 1$ donc $|||T||| = 1$, mais celui ci n'est pas atteint.

Les normes ont qqc de particulier : elles se comportent bien vis-à-vis de la composition :

Proposition : Si $(E, \|\ \|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ sont 3 evn et $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$, alors $g\circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et

$$|||g\circ f|||_{(E,\|\|_E)\to(F,\|\|_F)} \leq |||g|||_{\|\|_F\to\|\|_G} \times |||f|||_{\|\|_E\to\|\|_F}$$

__Preuve__ Pour tt $x \in E$, $\|g(f(x))\|_G \leq |||g|||_{(\cdot)} \|f(x)\|_F \leq |||g|||_{(\cdot)} \cdot |||f|||_{(\cdot)} \cdot \|x\|_E$

donc par def, $|||g\circ f|||_{(\cdot)} \leq |||g|||_{(\cdot)} \cdot |||f|||_{(\cdot)}$ □

L'inégalité peut être stricte, notamment si $g\circ f = 0$ alors que f et g ne sont pas identiquement nulles.

__Exemples de normes sur $M_{n\times m}(\mathbb{K})$__

L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{K}^m$ ds $\mathbb{K}^n$ $(n, m \in \mathbb{N}^*)$ s'identifie à celui des matrices $n\times m$ à coef dans $\mathbb{K}$.

Exprimons alors $|||A|||$ en fonction des coeff a_{ij} de A pour différents choix de normes sur $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$.

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont munis de $\|\cdot\|_1$:

$$|||A|||_1 = \sup_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(exercice)}$$

- $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ sont munis de $\|\ \|_\infty$

$$|||A|||_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \quad \text{(exercice)}$$

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont munis de $\|\cdot\|_2$

$$|||A|||_2 = \sqrt{\underbrace{\text{rayon spectral}}_{\max(|\text{vp de } A^*A|)}(A^*A)} \qquad \left(A^* = (\overline{a_{ji}})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} = \bar{A}^t\right)$$

En effet, pour tt $x \in \mathbb{K}^m$,

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax\rangle_{\mathbb{K}^n} = \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i \overline{(Ax)_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\overline{a_{ik}}\,\overline{x_k}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j,k=1}^{m} a_{ij}x_j\overline{a_{ik}}\,\overline{x_k}\right)$$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{j,k=1}^{m} x_j \overline{x_k} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{a_{ik}}\, a_{ij}\right)}_{(A^*A)_{kj}} = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} (A^*A)_{kj} x_j\right)}_{(A^*Ax)_k} \cdot \overline{x_k} = \langle A^*Ax, x\rangle_{\mathbb{K}^m}$$

Or $A^*A \in M_m(\mathbb{K})$ est
- symétrique (si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) ou hermitienne (si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)
- semi-définie positive : $\langle A^*Ax, x\rangle = \|Ax\|_2^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^m$

Donc elle est diagonalisable dans une BON $(e_1 - e_m)$:

On a $A^*Ae_i = \lambda_i e_i$ avec $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$ ← $R_{sp}(A^*A)$

Si $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$, on a donc $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2$

et $\langle A^*Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \lambda_i \leq \lambda_m \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 = \lambda_m \|x\|_2^2$

avec égalité si x est un multiple de e_m

Finalement, on a $|||A|||_2^2 = \lambda_m$ ie $|||A|||_2 = \left(R_{sp}(A^*A)\right)^{1/2}$ $\square$

⚠ Toute norme sur $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ n'est pas subordonnée à des normes de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$.

En effet, $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$

(C'est la norme $\|\ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^{n^2} \simeq M_n(\mathbb{R})$), mais pour $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$ donc $\|A^2\|_\infty = n \not\leq \|A\|_\infty \|A\|_\infty = 1$ dès que $n>1$.

<u>Cas des formes linéaires</u>. Soit E un $\mathbb{K}$ev.

Déf 1) (Rappel) On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire $E \to \mathbb{K}$. L'espace vectoriel de toutes les formes lin sur E est appelé dual algébrique de E.

2) Si E est normé, l'espace vectoriel <u>normé</u> (muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\ \|_E$ et $|\cdot|$ sur $\mathbb{K}$) de toutes les formes linéaires <u>continues</u> sur E est appelé dual topologique de E.

Le dual topologique est inclus dans le dual algébrique et on a déjà vu que cette inclusion pouvait être stricte.

Rappel : Si φ est une forme linéaire sur E,

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in E,\ \varphi(x) = 0\}$$

C'est un sev de E. Si φ est non identiq^t nulle, c'est un hyperplan de E.
En effet, si $a \in E$ est tel que $\varphi(a) = 1$, tt $x \in E$ se décompose en $\varphi(x)a + (x - \varphi(x)a)$
ce qui permet de montrer $E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \mathbb{K}a$.

Si maintenant E est un evn, on a 2 possibilités :

Proposition Soit $(E, \|.\|)$ un evn et φ une forme lin sur E, non identiquement nulle. Alors : - si φ est C^0, $\operatorname{Ker}\varphi$ est fermé dans E.
- si φ n'est pas C^0, $\operatorname{Ker}\varphi$ est dense dans E.

Comme $\operatorname{Ker}\varphi$ est strictement inclus dans E, il ne peut être à la fois fermé et dense, donc on a en fait des équivalences. Ce sont donc des caractérisations de la (non) continuité.

Preuve • Si φ est continue, $\operatorname{Ker}\varphi = \underbrace{\varphi^{-1}(\{0\})}_{\text{fermé}}$ est un fermé de E.

• Si φ n'est pas continue, donc pas bornée sur la sphère unité, il existe une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tq $\|x_n\| = 1$ et $|\varphi(x_n)| \to +\infty$, ou encore (en remplaçant x_n par $\frac{x_n}{|\varphi(x_n)|}$) une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to 0$ et $|\varphi(x_n)| = 1$ $\forall n$, et même, en remplaçant x_n par $\frac{\varphi(x_n)}{|\varphi(x_n)|}$ tq $x_n \to 0$ et $\varphi(x_n) = 1$

Ainsi, si $a \in E$ est tq $\varphi(a) = 1$, $(y_n = -x_n + a)_n$ est une suite de $\operatorname{Ker}\varphi$ qui converge vers a.

Mais alors si $x \in E$, $x = \varphi(x)\,a + \underbrace{(x - \varphi(x)a)}_{\in \operatorname{Ker}\varphi}$ est limite de $\left(\varphi(x)x_n + (x - \varphi(x)a)\right)_n \in (\operatorname{Ker}\varphi)^{\mathbb{N}}$. Donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est dense dans E $\square$

fin du chap.