<u>Ex</u> $(E, \| \|_E) = (C([0,1], \mathbb{R}), \| \|_\infty)$, $(F, \| \|_F) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$\varphi : E \longrightarrow F$$
$$f \longmapsto f(0)$$

Cette appli lin est continue : $\forall f \in E, \ |f(0)| \leq 1 \cdot \|f\|_\infty$

pour $f = \tilde{1}$, on a égalité. Donc 1 est la meilleure constante

$\rightarrow \underline{|||\varphi||| = 1}$

<u>Proposition</u> : L'application $\mathcal{L}_c(E,F) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (pour des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ données)
$$f \longmapsto |||f|||$$
est une norme sur l'espace v. $\mathcal{L}_c(E,F)$ des appli lin C^0 de E ds F.

(On devrait noter $||| \ |||_{(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)}$)

<u>Preuve</u>
- séparation : immédiat (le faire)
- homogénéité : aussi (par homogénéité de $\|\cdot\|_F$)
- inégalité triangulaire : Soient $f, g \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

$\forall x \in E$ tq $\|x\|_E = 1$, $\|(f+g)(x)\|_F = \|f(x) + g(x)\|_F \leq \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F \leq |||f||| + |||g|||$

donc par passage au sup

$$|||f+g||| \leq |||f||| + |||g|||$$

<u>Rq</u> En dimension finie, le sup est atteint car f est C^0 et la boule unité fermée est compacte. Mais en général ce n'est pas le cas.

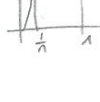
<u>Ex</u> Prenons $(E, \| \|_E) = \{ f \in C([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \}$ muni de $\| \|_\infty$

et $(F, \|\cdot\|_F) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

et $T : E \longrightarrow F$
$$f \longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx$$

Alors $\forall f \in E$, tq $\|f\|_\infty \leq 1$, $|T(f)| = \left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \ \underline{< 1}$

car $|f(x)| \leq 1 \ \forall x$ et $|f(x)| < 1$ sur tt un intervalle au voisinage de 0 puisque f est nulle et continue en 0.

Donc $|||T||| \leq 1$. Mais avec $f_n =$  on a $T(f_n) \to 1$ avec $\|f_n\|_\infty \leq 1$ donc $|||T||| = 1$, mais celui ci n'est pas atteint.

Ces normes ont qqc de particulier : elles se comportent bien vis-à-vis de la composition :

Proposition : Si $(E, \| \|_E)$, $(F, \| \|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ sont 3 evn et $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et

$$||| g\circ f |||_{(E,\| \|_E)\to(F,\| \|_F)} \leq ||| g |||_{\| \|_F \to \| \|_G} \times ||| f |||_{\| \|_E \to \| \|_F}$$

Preuve Pour $\forall x \in E$, $\| g(f(x))\|_G \leq |||g|||_{(.)} \|f(x)\|_F \leq |||g|||_{(.)} \cdot |||f|||_{(.)} \cdot \|x\|_E$

donc par def, $|||g\circ f|||_{(.)} \leq |||g|||_{(.)} \cdot |||f|||_{(.)}$ $\square$

L'inégalité peut être stricte, notamment si $g\circ f = 0$ alors que f et g ne sont pas identiquement nulles.

Exemples de normes sur $M_{n\times m}(\mathbb{K})$

L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{K}^m$ ds $\mathbb{K}^n$ $(n,m \in \mathbb{N}^*)$ s'identifie à celui des matrices $n\times m$ à coef dans $\mathbb{K}$.

Exprimons alors $|||A|||$ en fonction des coeff a_{ij} de A pour différents choix de normes sur $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$.

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont munis de $\|.\|_1$:

$$|||A|||_1 = \sup_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(exercice)}$$

- $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ sont munis de $\| \|_\infty$

$$|||A|||_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \quad \text{(exercice)}$$

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont munis de $\|.\|_2$

$$|||A|||_2 = \sqrt{\underbrace{\text{rayon spectral}}_{\max(|\text{vp de } A^*A|)}(A^*A)} \qquad \left(A^* = (\overline{a_{ji}})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = \bar{A}^t\right)$$

En effet, pour $\forall x \in \mathbb{K}^m$,

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax\rangle_{\mathbb{K}^n} = \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i \overline{(Ax)_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right)\left(\sum_{k=1}^{m} \overline{a_{ik}}\,\overline{x_k}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j,k=1}^{m} a_{ij} x_j \overline{a_{ik}}\,\overline{x_k}\right)$$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{j,k=1}^{m} x_j \overline{x_k} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{a_{ik}}\, a_{ij}\right)}_{(A^*A)_{kj}} = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} (A^*A)_{kj}\, x_j\right)}_{(A^*Ax)_k} \cdot \overline{x_k} = \langle A^*Ax, x\rangle_{\mathbb{K}^m}$$

Or $A^*A \in M_m(\mathbb{K})$ est
- symétrique (si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) ou hermitienne (si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)
- semi-définie positive : $\langle A^*Ax, x\rangle = \|Ax\|_2^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{K}^m$

Donc elle est diagonalisable dans une BON $(e_1 \ldots e_m)$:
On a $A^*Ae_i = \lambda_i e_i$ avec $0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_m$ ← $R_{sp}(A^*A)$

Si $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$, on a donc $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2$

et $\langle A^*Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \lambda_i \leq \lambda_m \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 = \lambda_m \|x\|_2^2$

avec égalité si x est un multiple de e_m

Finalement, on a $|||A|||_2^2 = \lambda_m$ ie $|||A|||_2 = \left(R_{sp}(A^*A)\right)^{1/2}$ □

⚠ Tte norme sur $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ n'est pas subordonnée à des normes de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$.

En effet, $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ (C'est la norme $\|\ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^{n^2} \simeq M_n(\mathbb{R})$), mais pour $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$ donc $\|A^2\|_\infty = n \not\leq \|A\|_\infty \|A\|_\infty = 1$ dès que $n>1$.

<u>Cas des formes linéaires</u>. Soit E un $\mathbb{K}$ev.

Déf 1) (Rappel) On appelle forme linéaire sur E tte application linéaire $E \to \mathbb{K}$. L'espace vectoriel de ttes les formes lin sur E est appelé dual algébrique de E.

2) Si E est normé, l'espace vectoriel <u>normé</u> (muni de la norme $|||\ |||$ subordonnée à $\|\ \|_E$ et $|\ |$ sur $\mathbb{K}$) de toutes les formes linéaires <u>continues</u> sur E est appelé dual topologique de E.

Le dual topologique est inclus dans le dual algébrique et on a déjà vu que cette inclusion pouvait être stricte.

Rappel Si φ est une forme linéaire sur E,

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{x \in E,\ \varphi(x) = 0\}$$

C'est un sev de E. Si φ est non identiqt nulle, c'est un hyperplan de E.
En effet, si $a \in E$ est tel que $\varphi(a) = 1$, tt $x \in E$ se décompose en $\varphi(x)a + (x - \varphi(x)a)$
ce qui permet de montrer $E = \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus \mathbb{K}a$.

Si maintenant E est un evn, on a 2 possibilités :

Proposition Soit $(E, \|.\|)$ un evn et φ une forme lin sur E, non identiquement nulle. Alors :
- si φ est C^0, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est fermé dans E.
- si φ n'est pas C^0, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est dense dans E.

Comme $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est strictement inclus dans E, il ne peut être à la fois fermé et dense, donc on a en fait des équivalences. Ce sont donc des caractérisations de la (non) continuité.

Preuve
- Si φ est continue, $\mathrm{Ker}\,\varphi = \varphi^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{fermé}})$ est un fermé de E.
- Si φ n'est pas continue, donc pas bornée sur la sphère unité, il existe une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tq $\|x_n\| = 1$ et $|\varphi(x_n)| \longrightarrow +\infty$, ou encore (en remplaçant x_n par $\frac{x_n}{|\varphi(x_n)|}$) une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to 0$ et $|\varphi(x_n)| = 1$ $\forall n$, et même, en remplaçant x_n par $\frac{\overline{\varphi(x_n)}}{|\varphi(x_n)|}$ tq $x_n \to 0$ et $\varphi(x_n) = 1$

  Ainsi, si $a \in E$ est tq $\varphi(a) = 1$, $(y_n = -x_n + a)_n$ est une suite de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ qui converge vers a

  Mais alors si $x \in E$, $x = \varphi(x)\,a + \underbrace{(x - \varphi(x)a)}_{\in\,\mathrm{Ker}\,\varphi}$ est limite de $\big(\varphi(x)x_n + (x - \varphi(x)a)\big)_n \in (\mathrm{Ker}\,\varphi)^{\mathbb{N}}$. Donc $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est dense dans E $\square$

Fin du chap.