§ 9. Applications linéaires continues

Proposition Soit $f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) f est continue
2) f est continue à l'origine
3) f est bornée sur la boule unité fermée
4) il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ tq $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E \quad \forall x \in E$
5) f est lipschitzienne.

Preuve 1) ⇒ 2) est immédiat

2) ⇒ 3) Supposons f continue à l'origine. Alors $\exists \delta > 0$ tq

Seul point important

$\forall x \in E, \quad \|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1 \quad$ (puisque $f(0) = 0$)

Mais alors si $\|x\|_E \leq 1$, $\|\delta x\|_E \leq \delta$ donc $\underbrace{\|f(\delta x)\|_F}_{= \delta \|f(x)\|_F} \leq 1$

Donc $\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\delta} \quad \forall x \in B_E(0,1)$ donc f est bornée sur $B_E(0,1)$

3) ⇒ 4) Supposons qu'$\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\|f(x)\|_F \leq M \quad \forall x \in B_E(0,1)$

Alors $\forall x \in E$, $\frac{x}{\|x\|_E} \in B_E(0,1)$ de $\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq M$

ie $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq M$ ce qui donne ce qu'on veut.

4) ⇒ 5) Si 4 est vrai alors $\forall x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leq M \|x-y\|_E$

5) ⇒ 1) On a déjà vu que lipschitzienne ⇒ continue □

Proposition Si $\dim(E) < +\infty$, toute application linéaire $f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ est continue.

Preuve On a vu que $\|.\|_E$ était équivalente à $\|.\|_\infty$ donc il suffit de considérer ce cas.

pour une base $(e_1 \ldots e_n)$ donnée

Mais si $\|x\|_\infty \leq 1$

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \right\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i|}_{\leq 1} \|f(e_i)\|_F \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F}_{\text{indep}^t \text{ de } x}$$

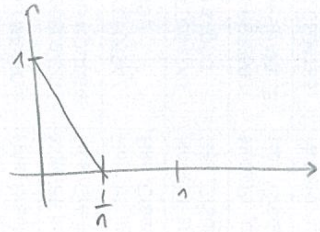
donc f bornée sur la boule unité. □

II.19

Bien sûr ce n'est pas vrai si E est de dim ∞ :

Prenons $(E, \|\ \|_E) = (C([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_1)$ et $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(0)$ (forme linéaire)

Considérons la suite $\underset{(n\geq 1)}{f_n}$:



$\varphi(f_n) = 1 \ \forall n$

mais $\|f_n\|_1$ = aire du triangle $= \dfrac{1}{2n} \longrightarrow 0$ donc (f_n) cv vers $\tilde{0}$ pour $\|\ \|_1$

et on n'a pas $\varphi(f_n) \longrightarrow \varphi(\tilde{0}) = 0$.

Def Si f est une application continue de $(E, \|\ \|_E)$ dans $(F, \|\ \|_F)$, on définit la "norme d'opérateur" de f (associée aux normes $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$) par

$$|||f||| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|f(x)\|_F$$

$< +\infty$ (puisque f est bornée sur la boule unité fermée par continuité)

Prop

$$|||f||| = \underbrace{\sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E = 1}} \|f(x)\|_F}_{A} = \underbrace{\sup_{\substack{x\in E \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}}_{B}$$

(si $\dim E \neq 0$)

Preuve Clairement $A \leq |||f|||$ (sup sur un ensemble plus petit)

En outre,

$$|||f||| = \sup_{\substack{x\in E \\ 0<\|x\|_E\leq 1}} \|f(x)\|_F \leq \sup_{\substack{x\in E \\ 0<\|x\|\leq 1}} \frac{\|f(x)\|_F}{\underbrace{\|x\|_E}_{\leq 1}} \leq B$$

(sup sur un ensemble plus petit)

Reste donc à montrer que $B \leq A$

Mais si $x \in E, x \neq 0$, en posant $y = \dfrac{x}{\|x\|_E}$, on a $\|y\|_E = 1$ et $\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \|f(y)\|$

donc $B \leq \sup_{\|y\|_E = 1} \|f(y)\|_F = A$. $\square$

Par définition, $\|f(x)\|_F \leq |||f|||.\|x\|_E \ \forall x \in E$ et $|||f|||$ est la plus petite constante pour laquelle cette inégalité est vraie.