Nous (re)venons sous peu au cas très particulier d'applications continues : les appl. linéaires C^0 entre evn. Mais avant ça il nous faut faire un détour par la notion de compacité.

§ 8 Parties et espaces compacts

(A) Définition et propriétés générales

Déf métrique de la compacité : Soit (E,d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble $A \subset E$ est **compact** si toute suite dans A admet une sous-suite qui converge vers un point de A.
Dans le cas $A = E$, on dit que E est un **espace métrique compact**.

⚠ Ce ne sera pas la déf générale d'une partie compacte d'un espace topologique mais elle lui sera équivalente dans les espaces métriques.

Prop Tout sous-ensemble compact est fermé et borné.

⚠ La réciproque est fausse en général. On verra cependant qu'elle est vraie dans le cas des espaces vectoriels normés de dim finie.

Preuve Soit A un ens. compact et $(x_n)_n$ une suite d'élts de A convergeant dans E vers une limite x_∞. (x_n) admet en outre une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant dans E vers $x'_\infty \in A$. Par unicité de la limite de $(x_{\varphi(n)})$, qui cv vers x_∞ comme ss-suite de (x_n), $x_\infty \in A$.
Donc A est fermé.
Supposons que A n'est pas borné. (ce que $\{d(x,y),\ x,y \in A\}$ n'est pas majoré)

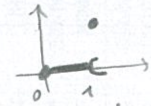
Alors on peut construire par récurrence une suite (x_n) de A tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d(x_n, \{x_0, \dots, x_{n-1}\}) \geq 1$ (écrire les détails !) (Exo)
En particulier cette suite ne possède aucune sous-suite de Cauchy, donc a fortiori aucune ss-suite convergente, ce qui contredit la compacité de A. □

(Exo) : Pourquoi ?

Contre-exemple en dimension ∞ : Un fermé borné non compact :

$(E,d) = (C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, $A = \overline{B}(0,1)$ sa boule unité fermée.

Considérons une suite déjà rencontrée : $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a déjà vu que (f_n) CVS vers la fonction f :  , donc toute sous-suite aussi. Or une sous-suite qui convergeait dans (E,d) vers une fct° g (C^0, puisque ds E) convergeait aussi simplement vers g, donc $g = f$ par unicité de la limite simple, ce qui est impossible car f n'est pas C^0. Donc pas de ss-suite convergente. Donc A n'est pas compact □

Rq Tout ss.ens. fermé d'un compact est compact (immédiat)

Rq tout espace métrique compact est complet. En effet une suite de Cauchy admet une ss-suite convergente et donc converge elle-même.

Histoire d'avoir des exemples :

Proposition Dans $\mathbb{R}$, (muni de la distance usuelle) un sous-ensemble est compact ssi il est fermé et borné

Preuve $\Rightarrow$ cf proposition ci avant

$\Leftarrow$ Soit (x_n) une suite d'un tel ss ens. A. Par B-W, (x_n) admet une ss-suite qui converge dans $\mathbb{R}$, et comme A est fermé, elle cv en fait dans A □

Du coup, les segments de $\mathbb{R}$ sont des compacts. Un autre exemple célèbre est l'ensemble triadique de Cantor construit itérativement de la façon suivante : à $[0,1]$, on retire son tiers central ouvert $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, à l'ens. obtenu $[0,\frac{1}{3}]\ [\frac{2}{3},1]$, on retire les tiers centraux ouverts des segments restants

$\hookrightarrow$ [ ][ ] [ ][ ], etc...

On obtient $K = [0,1] \setminus \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left] \frac{k}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}, \frac{k}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} \right[\right)}_{\text{ouvert}}$

$= [0,1] \cap^c \underbrace{(\qquad)}_{\text{fermé}}$

$\rightarrow K$ est fermé borné donc compact.

On peut vérifier que K est parfait (fermé sans point isolé) et totalement discontinu (ses composantes connexes (par arcs) sont les singletons).

Retour aux résultats généraux :

Proposition Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application continue. Si $A \subset E$ est compact, alors $f(A) \subset E_2$ est compact

Rq Ce sera vrai en topologie générale du moment que F est séparé

Cela se résume en "l'image continue d'un compact est compacte"
Pour $E = F = \mathbb{R}$ on retrouve le fait que f est bornée et atteint ses bornes

Preuve Soit $(y_n)_n$ une suite de $f(A)$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $y_n = f(x_n)$ avec $x_n \in A$. Comme A est compact, (x_n) admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers $l \in A$. Mais alors par continuité de f, la sous-suite $(y_{\varphi(n)})$ de (y_n) converge vers $f(l) \in f(A)$. Donc $f(A)$ est compact □

On verra des applications dans le paragraphe suivant.
On complète les propriétés topologiques préservées par homéomorphisme :
Si deux espaces métriques sont homéomorphes, l'un est compact ssi l'autre l'est.

Ça nous (re)montre notamment que $[a,b]$ et $[a,+\infty[$ ne sont pas homéomorphes. On verra en outre dans un instant que S^1 est compacte et ne peut donc être homéomorphe à $[0, 2\pi[$.

Un autre résultat bien utile concernant les homéos :

Proposition Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, E compact, et soit $f : E \to F$ bijective continue. Alors f est un homéo.

Dem Il suffit de mq pour tout fermé A de (E, d_E) $(f^{-1})^{-1}(A)$ est un fermé de (F, d_F). Mais un fermé A de E, compact, est compact, donc $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ est compact comme image d'un compact par une app. continue. Il est en particulier fermé. □

Applications : On en verra notamment qd on parlera de topologie quotient.

Enfin **Thm (Heine)** Si $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ est C^0 et $A \subset E$ compact alors $f|_A$ est uniformément continue.

[illegible]

(B) Compacité dans les evn de dimension finie

Proposition Toute suite bornée de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ admet une sous-suite convergente.

Corollaire Dans $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$, un sous-ens est compact ssi il est fermé et borné

(comme dans $\mathbb{R}$)

Preuve de la proposition Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée pour $\|\ \|_\infty$

On note $(x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})$ les coordonnées de x_k, $\forall k\in\mathbb{N}$.

(*) Alors $(x_k^{(1)})$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$ donc d'après B-W, elle admet une sous-suite $(x_{\varphi_1(k)}^{(1)})$ convergente. $(x_{\varphi_1(k)}^{(2)})$ est aussi une suite bornée réelle donc admet une sous suite convergente $(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(k)}^{(2)})$

Notons que $(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(k)}^{(1)})$ est une sous-suite de $(x_{\varphi_1(k)}^{(1)})$ donc cv encore.

En procédant ainsi par induction sur $j\in\{1,\dots,n\}$ on obtient une suite $(x_{\varphi(k)})_k = (x_{\varphi(k)}^{(1)} \dots x_{\varphi(k)}^{(n)})$ avec $\varphi=\varphi_1\circ\varphi_2\circ\dots\circ\varphi_n$ extract°, qui converge dans $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ puisque ses composantes cv dans $\mathbb{K}$.

Rq (*) On a utilisé B-W pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors qu'on ne l'avait démontré que pour $\mathbb{R}$ mais on peut en fait le déduire pour $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$ par la preuve ci-dessus en utilisant que $\|.\|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$.

On va voir que le résultat ci-dessus est vrai pour tte norme sur $\mathbb{K}^n$, car elles sont ttes équivalentes. Pour montrer ce fait, on va faire le lien entre compacité et applications continues.

Equivalence des normes en dimension finie

Rappel

Def Soit E un $\mathbb{K}$ev de dim finie. On dit que 2 norme $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont équivalentes s'il existe des constantes $C, C' > 0$ tq

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

(Exo)

- c'est une relation d'équivalence
- on abrège souvent ça en : $\exists A > 0$ tq $\frac{1}{A}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq A\|x\|_2 \ \forall x$

mais du coup la symétrie ne se voit pas du 1er coup d'oeil.

Si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, alors les EVN $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ ont exactement les m̂ suites convergentes, donc la m̂ topo (ouverts et fermés), dc les m̂ fct° C^0.

La réciproque est vraie (⚠ on a vu qu'elle ne l'était pas pour des distances qcq, pas associées à des normes)

En effet, s'il n'existe pas de constante $C > 0$ tq $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \ \forall x \in E$, on peut construire une suite (x_n) tq $\|x_n\|_1 > n\|x_n\|_2$ et alors en posant $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_1}$, $\|y_n\|_1 = 1$ et $\|y_n\|_2 < \frac{1}{n} \to 0$, dc les topologie ne sont pas les m̂.

(On a utilisé l'homogénéité de la ~~distance~~ norme)

Thm Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes

Rq On a déjà vu que c'était faux en dim ∞ ac les normes L^p sur $C([a,b], \mathbb{R})$.

Preuve notons $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. (que l'on peut évidemment supposer ≥ 1 sinon il n'y a rien à montrer)

On commence par fixer une base $(e_1 \ldots e_n)$ de E et lui associer une norme de référence, notée $\|\cdot\|_\infty$:

Tt $x \in E$ se décompose de façon unique en $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et on pose $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. (Vérifier que c'est bien une norme!

On va mq tte norme $\|\cdot\|$ sur E est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

En effet, l'inégalité triangulaire sur $\|.\|$ et l'homogénéité montrent déjà que $\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\| \leq \|x\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|}_{C>0}$ (*)

Idée pour la réciproque : $\|.\|_\infty \leq C \|.\| \iff \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \frac{1}{C} \leq \left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\|$

$\iff \forall x \in S_{\|\|_\infty}(0,1) \quad \frac{1}{C} \leq \|x\|$

Donc il s'agit de mq $\|.\|$ est minorée par un nb > 0 sur $S_{\|\|_\infty}(0,1)$

Or c'est une fct° st. positive, dc il suffit pour cela de mq son inf est atteint et pour cela de mq elle est C^0 et que $S_{\|.\|_\infty}(0,1)$ est compact :

Question : pour quelle topologie ? Celle de $\|.\|_\infty$

- $\|.\|$ est lipsch. par (*) pour $\|\|_\infty$ donc C^0
- S est fermée bornée pour $\|\|_\infty$ dc compacte

CQFD □

<u>Corollaire</u> | Dans un evn de dim finie, quelle que soit la norme, les compacts sont les fermés bornés.

(ex $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sphère unité)

Ça ne marche plus du tt en dimension infinie. On a notamment le <u>thm de Riesz</u> qui affirme qu'un evn est de dim finie ssi sa boule unité fermée est compacte.

Voyons un nouvel exemple de fermé borné non compact dans l'espace le + simple après les evn de dim finie → espace des suites

$\forall p \in [1,+\infty]$, on définit l'espace $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ comme l'ensemble des suites $(x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tq $\|x\|_p < +\infty$ où :

<u>Si $p<+\infty$</u> $\quad \|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$

$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$

On vérifie (en suivant la même démarche que pour $\mathbb{K}^n$ ou $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$) que $(l^p, \|.\|_p)$ est un evn.

La boule unité fermée $\overline{B}$ de l^p est fermée bornée (tjs vrai) mais pas compacte. En effet, considérons la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de l^p déf. par $e_k = (0, 0, \ldots, 0, \underset{k^e \text{ position}}{1}, 0, \ldots)$. On a, pour $k \neq k'$, $\|e_k - e_{k'}\|_p = 2^{1/p} \geq 1$ donc pas de ss suite cv, dc $\overline{B}$ pas compact □