B) Compacité dans les evn de dimension finie

Proposition Toute suite bornée de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ admet une sous-suite convergente.

Corollaire Dans $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$, un sous-ens est compact ssi il est fermé et borné

(comme dans $\mathbb{R}$)

Preuve de la proposition Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée pour $\|\ \|_\infty$

On note $(x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})$ les coordonnées de x_k, $\forall k\in\mathbb{N}$.

(*) Alors $(x_k^{(1)})$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$ donc d'après B-W, elle admet une sous-suite $(x^{(1)}_{\varphi_1(k)})$ convergente. $(x^{(2)}_{\varphi_1(k)})$ est aussi une suite bornée réelle donc admet une sous suite convergente $(x^{(2)}_{\varphi_1\circ\varphi_2(k)})$

Notons que $(x^{(1)}_{\varphi_1\circ\varphi_2(k)})$ est une sous-suite de $(x^{(1)}_{\varphi_1(k)})$ donc cv encore.

En procédant ainsi par induction sur $j\in\{1,\dots,n\}$ on obtient une suite $(x_{\varphi(k)})_k = (x^{(1)}_{\varphi(k)} \dots x^{(n)}_{\varphi(k)})$ avec $\varphi = \varphi_1\circ\varphi_2\circ\dots\circ\varphi_n$ extract°, qui converge dans $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ puisque ses composantes cv dans $\mathbb{K}$.

Rq (*) On a utilisé B-W pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors qu'on ne l'avait démontré que pour $\mathbb{R}$ mais on peut en fait le déduire pour $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$ par la preuve ci-dessus en utilisant que $\|.\|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$.

On va voir que le résultat ci-dessus est vrai pour tte norme sur $\mathbb{K}^n$, car elles sont ttes équivalentes. Pour montrer ce fait, on va faire le lien entre compacité et applications continues.

Equivalence des normes en dimension finie

Rappel

Déf Soit E un $\mathbb{K}$ev de dim qqc. On dit que 2 norme $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur E sont équivalentes s'il existe des constantes $C, C' > 0$ tq

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad et \quad \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

Exo

- c'est une relation d'équivalence
- on abrège souvent ça en : $\exists A > 0$ tq $\frac{1}{A}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq A\|x\|_2 \ \forall x$

mais du coup la symétrie ne se voit pas du 1er coup d'oeil.

Si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes, alors les EVN $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$ ont exactement les m̂ suites convergentes, donc la m̂ topo (ouverts et fermés), dc les m̂ fct° C^0.

La réciproque est vraie (⚠ on a vu qu'elle ne l'était pas pour des distances qcq, pas associées à des normes)

En effet, s'il n'existe pas de constante $C > 0$ tq $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \ \forall x \in E$, on peut construire une suite (x_n) tq $\|x_n\|_1 > n\|x_n\|_2$ et alors en posant $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_1}$, $\|y_n\|_1 = 1$ et $\|y_n\|_2 < \frac{1}{n} \to 0$, dc les topologie ne sont pas les m̂.

(On a utilisé l'homogénéité de la ~~distance~~ norme)

Thm Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes

Rq On a déjà vu que c'était faux en dim ∞ ac les normes L^p sur $C([a,b], \mathbb{R})$.

Preuve notons $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. (que l'on peut évidemment supposer ≥ 1 sinon il n'y a rien à montrer)

On commence par fixer une base $(e_1 \dots e_n)$ de E et lui associer une norme de référence, notée $\|.\|_\infty$:

Tt $x \in E$ se décompose de façon unique en $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et on pose $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. (Vérifier que c'est bien une norme!

On va mq tte norme $\|.\|$ sur E est équivalente à $\|.\|_\infty$.

En effet, l'inégalité triangulaire sur $\|.\|$ et l'homogénéité montrent

déjà que $\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\| \leq \|x\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|}_{C>0}$ (*)

Idée pour la réciproque : $\|.\|_\infty \leq C \|.\| \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \; \frac{1}{C} \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|$

$\Leftrightarrow \forall x \in S_{\|\,\|_\infty}(0,1) \quad \frac{1}{C} \leq \|x\|$

Donc il s'agit de mq $\|.\|$ est minorée par un nb > 0 sur $S_{\|\,\|_\infty}(0,1)$

Or c'est une fct° st. positive, dc il suffit pour cela de mq son inf est atteint

et pour cela de mq elle est C^0 et que $S_{\|.\|_\infty}(0,1)$ est compact :

Question : pour quelle topologie ? Celle de $\|.\|_\infty$

- $\|.\|$ est lipsch. par (*) pour $\|\,\|_\infty$ donc C^0
- S est fermée bornée pour $\|\,\|_\infty$ dc compacte

CQFD □

Corollaire | Dans un evn de dim finie, quelle que soit la norme, les compacts sont les fermés bornés.

(ex $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sphère unité)

Ça ne marche plus du tt en dimension infinie. On a notamment le thm de Riesz qui affirme qu'un evn est de dim finie ssi sa boule unité fermée est compacte.

Voyons un nouvel exemple de fermé borné non compact dans l'espace le + simple après les evn de dim finie → espace des suites

$\forall p \in [1,+\infty]$, on définit l'espace $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ comme l'ensemble des suites $(x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tq $\|x\|_p < +\infty$ où :

si $p<+\infty$ $\quad \|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$

$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

On vérifie (en suivant la même démarche que pour $\mathbb{K}^n$ ou $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$) que $(l^p, \|.\|_p)$ est un evn.

La boule unité fermée $\overline{B}$ de l^p est fermée bornée (tj vrai) mais pas compacte. En effet, considérons la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de l^p déf. par $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (k^e position). On a, pour $k \neq k'$, $\|e_k - e_{k'}\|_p = 2^{1/p} \geq 1$ donc pas de ss suite cv, dc $\overline{B}$ pas compact □