Nous (re)venons sous peu au cas très particulier d'applications continues : les app. linéaires C^0 entre evn. Mais avant ça il nous faut faire un détour par la notion de compacité.

§ 8 Parties et espaces compacts

(A) Définition et propriétés générales

Déf métrique de la compacité : Soit (E,d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble $A \subset E$ est compact si toute suite dans A admet une sous-suite qui converge vers un point de A.
Dans le cas $A = E$, on dit que E est un espace métrique compact.

⚠ Ce ne sera pas la déf générale d'une partie compacte d'un espace topologique mais elle lui sera équivalente dans les espaces métriques.

Prop Tout sous-ensemble compact est fermé et borné.

⚠ La réciproque est fausse en général. On verra cependant qu'elle est vraie dans le cas des espaces vectoriels normés de dim finie.

Preuve Soit A un ens. compact et $(x_n)_n$ une suite d'élts de A convergeant dans E vers une limite x_∞. (x_n) admet en outre une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant dans E vers $x'_\infty \in A$. Par unicité de la limite de $(x_{\varphi(n)})$, qui cv vers x_∞ comme ss-suite de (x_n), $x_\infty \in A$.
Donc A est fermé.

Supposons que A n'est pas borné. (ce que $\{d(x,y),\ x,y \in A\}$ n'est pas majoré)

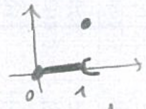
Alors on peut construire par récurrence une suite (x_n) de A tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d(x_n, \{x_0, \dots, x_{n-1}\}) \geq 1$ (écrire les détails!) (x_0)

(x_0) : Pourquoi ? En particulier cette suite ne possède aucune sous-suite de Cauchy, donc a fortiori aucune ss-suite convergente, ce qui contredit la compacité de A. □

Contre-exemple en dimension ∞ : Un fermé borné non compact :

$(E,d) = (C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, $A = \overline{B}(0,1)$ sa boule unité fermée.

Considérons une suite déjà rencontrée : $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a déjà vu que (f_n) CVS vers la fonction f :  , donc toute sous-suite aussi. Or une sous-suite qui convergerait dans (E,d) vers une fct° g (C^0, puisque ds E) convergerait aussi simplement vers g, donc $g=f$ par unicité de la limite simple, ce qui est impossible car f n'est pas C^0. Donc pas de ss-suite convergente. Donc A n'est pas compact ■

Rq Tout ss.ens. fermé d'un compact est compact (immédiat)

Rq tout espace métrique compact est complet. En effet Ute suite de Cauchy admet une ss-suite convergente et donc converge elle-même.

Histoire d'avoir des exemples :

Proposition Dans $\mathbb{R}$, (muni de la distance usuelle) un sous-ensemble est compact ssi il est fermé et borné

Preuve $\Rightarrow$ cf proposition ci-avant

$\Leftarrow$ Soit (x_n) une suite d'un tel ss ens. A. Par B-W, (x_n) admet une ss-suite qui converge dans $\mathbb{R}$, et comme A est fermé, elle cv en fait dans A □

Du coup, les segments de $\mathbb{R}$ sont des compacts. Un autre exemple célèbre est l'ensemble triadique de Cantor construit itérativement de la façon suivante : à $[0,1]$, on retire son tiers central ouvert $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$, à l'ens. obtenu $[0,\frac{1}{3}]\ [\frac{2}{3},1]$, on retire les tiers centraux ouverts des segments restants

↳ [-] [-] [-] [-], etc...

On obtient $K = [0,1] \setminus \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left]\frac{k}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}, \frac{k}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^n}\right[\right)}_{\text{ouvert}}$

$= [0,1] \cap {}^c\underbrace{(\quad\quad)}_{\text{fermé}}$

$\rightarrow$ K est fermé borné donc compact.