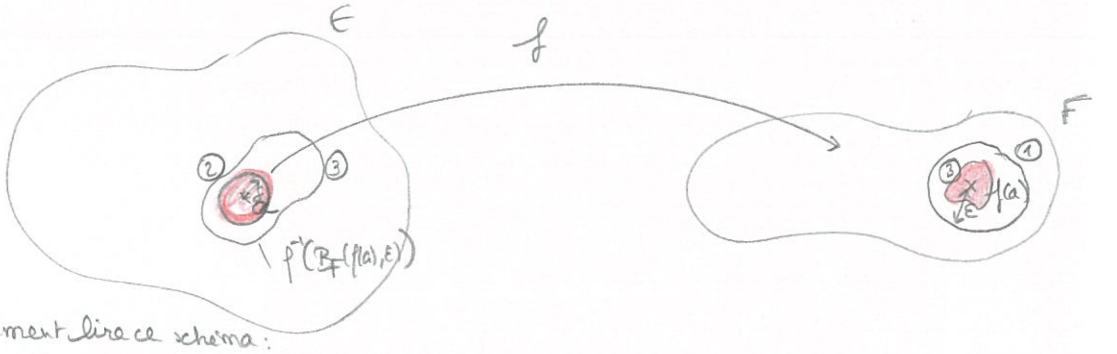
§7. Fonctions continues, densité

(A) Définitions et premières propriétés

Déf Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et $f : E \to F$ une application.

i) On dit que **f est continue au point $a \in E$** si
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in E, \ d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$
(Cette condition équivaut à : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $f^{-1}(B_{d_F}(f(a), \varepsilon)) \supset B_{d_E}(a, \delta)$)



Comment lire ce schéma :

① $\forall \varepsilon > 0$

② $\exists \delta > 0$

③ tq $f(B_E(a,\delta)) \subset B_F(f(a), \varepsilon)$ ou encore $B_E(a,\delta) \subset f^{-1}(B_F(f(a), \varepsilon))$

ii) On dit que **f est continue (sur E)** si elle est continue en tout point de E.

Rq1 Cette définition coïncide avec celle donnée au chapitre 1 dans le cas où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, tous deux munis de la distance associée à la $|.|$.

(Définir "C^0 sur A" comme "C^0 en tout point de A" ? C'est différent de "la restriction à A, muni de $d_{|A\times A}$, est continue", et c'est plutôt cette dernière notion qui nous intéresse.)

Rq2 Comme dans $\mathbb{R}$ ceci est **la définition**. Dans la pratique, on montre que certaines fonctions de référence sont continues, puis on utilise des thm de composition etc pour en déduire la $C^{té}$ de plein d'autres fonctions. Moralité : il ne faut pas tjs "revenir aux ε" (même si dans ce cours ce sera un peu le cas car c'est la base)

Comme ds $\mathbb{R}$, on peut caractériser la $C^{té}$ à l'aide des suites :

Proposition (critère séquentiel de continuité)

Une application $f : E \to F$ est continue au point $a \in E$ ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a dans E, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers $f(a)$ dans F.

exo **Preuve** : comme dans $\mathbb{R}$. exercice

Rq 3 La continuité de f au point a équivaut à :

$\forall$ voisinage V de $f(a)$ dans F, l'image inverse de V par f, $f^{-1}(V)$, est un voisinage de a dans E.

(En effet, $\Rightarrow$ si V est un vois de $f(a)$, V contient une boule ouverte $B_F(f(a), \varepsilon)$ ac $\varepsilon > 0$, dc $f^{-1}(V)$ contient $f^{-1}(B_F(\ ))$ qui lui-m̂ contient une boule ouverte centrée en a par def de la continuité, dc par def $f^{-1}(V)$ est un vois de a.

La réciproque est tout aussi immédiate.)

Et plus généralement :

Proposition (caractérisation topologique de la continuité) : Une applicat° $f : E \to F$ est continue ssi pour tout ouvert $W \subset F$, $f^{-1}(W)$ est un ouvert de E.

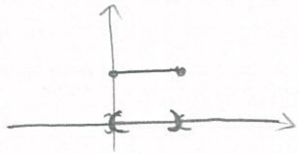
Pourquoi "caractérisation topologique..." parce que cette prop équivalente à la continuité ("caractérisation") ne dépend que de la donnée des ouverts de E et F, pas de la distance ("topologique"). Notamment, si d_E et d'_E sont deux distances équiv sur E, de sorte que
d_F et $d_{F'}$ ——— F
(E, d_E) et (E, d'_E) (resp. (F, d_F) et (F, d'_F)) ont les mêmes ouverts, une appl $f : E \to F$ est C^0 pour d_E, d_F ssi elle l'est pour d'_E, d'_F.
(penser aux appli lin entre evn de dim. finie, cf plus tard)

Preuve. Supposons que f soit continue et soit W un ouvert de F. Soit $a \in f^{-1}(W)$. $f(a) \in W$ ouvert dc W est un vois de $f(a)$, donc $f^{-1}(W)$ est un vois de a (cf ci-dessus). Ainsi on a mq $f^{-1}(W)$ est un voisinage de chacun de ses pts, ie que c'est un ouvert.

- Inversement, supposons que $\forall W$ ouvert de F, $f^{-1}(W)$ ouvert de E. Soit $a \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. $B_F(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de f dc $f^{-1}(B_F(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert qui contient a, donc une boule ouverte centrée en a, ce qui montre la continuité de f en a, et ce pour tout a □

• Exemples a) un peu triste : $id_E : (E,d_E) \to (E,d_E)$ est continue

b) $\mathbb{1}_{[0,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas continue



Preuve : 1) par la déf : prenons $a=0$
$(\exists)\ \varepsilon=\frac{1}{2}$ tq

$$\forall \delta>0,\ \exists x \in B(0,\delta),\ |f(x)-\underbrace{f(a)}_{1}| > \frac{1}{2}.$$

n'importe quel $x<0$ convient

2) par caractérisation séquentielle : $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \neq 1 = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$

3) par caractérisation topologique $f^{-1}\Big(\underbrace{B(\overset{}{f(a)}, \tfrac{1}{2})}_{]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[}\Big) = [0,1]$, pas ouvert dans $\mathbb{R}$. ($f(a) = 1$)

• Des notions plus fortes

Déf. • Une appl $f:(E,d_E)\longrightarrow(F,d_F)$ est uniformément C^0 sur E si
$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x,y\in E,\ d(x,y)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon$

• Une appl. $f:(E,d_E)\to(F,d_F)$ est k-lipschitzienne $(k\in\mathbb{R}_+)$
si $\forall (x,y)\in E^2,\ d(f(x),f(y)) \leq k.d(x,y)$

• Si f est k-lip. ac $k<1$, on dit que f est contractante.

Exo

Exo. lipschi $\Rightarrow$ UC°

Exemples • On a vu que si $A\subset E$, $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x,A)\end{array}$ est 1-lipschitz, donc continue

• ce sera une notion clef pour les appl linéaires continues.

En utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, on montre facilement les propriétés utiles suivantes :

Proposition 1) • Soient (E,d_E) et (F,d_F) et (G,d_G) 3 espaces métriques.
(composition) Si $f:E\to F$ et $g:F\to G$ sont continues en a et f(a) resp, $g\circ f : E\to G$ est C° en a.

(continuité composante par composante) 2) • Cas où $(F,d_F)=(F_1\times\dots\times F_n, d_{prod})$ avec d_{prod} induite par $d_1,\dots d_n$ sur $F_1\dots F_n$
$f:(E,d_E)\longrightarrow(F,d_F)$, $x\mapsto(f_1(x),\dots,f_n(x))$ est C° en a ssi les $f_i : E\to F_i$ le sont.

(continuité de la somme du produit) 3) • cas où F est un evn et d_F la distance associée à $\|\ \|_F$: si $f,g : E\to F$ sont C° en a alors $f+g$ et λf $(\forall \lambda\in\mathbb{K})$ aussi (n'aurait pas de sens pour (F,d_F) métrique qcq.)

(produit, quotient) 4/ Cas où $(F, \|\ \|_F) = (\mathbb{K}, |\ .\ |)$

si $f, g : E \to \mathbb{K}$ sont $C^0_{\text{en } a}$, $f \times g$ aussi, idem pour f/g si $g \neq 0$.

<u>Preuve</u> 1) Soit (x_n) une suite de E convergeant vers a. Alors par continuité de f en a et sens facile de la caract. séquentielle $(f(x_n))$ tend vers $(f(a))$ dans F. Mais alors par continuité de g en $f(a)$,

$$\underbrace{g(f(x_n))}_{(g\circ f)(x_n)} \longrightarrow g(f(a)) = (g\circ f)(a).$$

donc par sens <u>difficile</u> de la caractérisation séquentielle, $(g\circ f)$ est continue en a

<u>Rq</u> On peut faire la preuve <u>sans</u> la caract. séquentielle (qui, dans le chap 3, ne sera pas vraie en général)

exercice?

exo

exo

2/ 3/ 4/ proviennent des propriétés analogues sur les suites, que nous n'avons pas pris la peine de démontrer dans ce cours mais nous aurions dû!

<u>exo</u> • si $(u_n) \to a$, $(v_n) \to b$ dans un evn, $(u_n + v_n) \to (a+b)$ (inég triang)

• si $u_n \to a$, $v_n \to b (\neq 0)$ dans $\mathbb{K}$, $u_n v_n \to ab$, $u_n/v_n \to a/b$ (à faire!)

• $(u_n, v_n) \to (a,b)$ ds $(F_1 \times F_2, d_\times)$ ssi $u_n \to a$ ds (F_1, d_1) et $v_n \to b$ ds (F_2, d_2) (immédiat par def de $d_\times$)

<u>Alternative</u> : utiliser 1)

pour 3 et 4

$f+g : E \to F$ = composée de $E \to F\times F$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ C^0 par hyp + 2 et $F\times F \to F$, $(y,z) \mapsto y+z$ C^0 par inégalité triangulaire

λf ——— f et $K\times F \to F$, $\lambda, y \mapsto \lambda . y$ C^0 par homogénéité

fg ——— $E \to \mathbb{K}\times\mathbb{K}$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ C^0 par hyp + 2 et $\mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(a,b) \mapsto a\times b$ $\boxed{\text{A faire}}$

Conséquences

- pour $E = \mathbb{K}^n$ et $F = \mathbb{K}$, munis de distances associées à des normes usuelles, toute application polynomiale (à plusieurs variables) de $E \to F$ est C^0 comme somme de produits des fonctions $(x_1 \dots x_n) \longmapsto x_i$, qui sont elles-mêmes continues (on le verra dans les applic. linéaires).

- notamment, considérons $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n\times n}$ muni de $\|\ \|_\infty$

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}),\ \det(M) \neq 0 \} = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

où $\det\left((m_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, m_{1\sigma(1)} \cdots m_{n,\sigma(n)}$

signature de la permutation σ, $\in \{\pm 1\}$

est polynomiale (vue comme fct° de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}$) donc continue. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$

- l'application $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est continue

$$M \longmapsto M^{-1}$$

méthode 1 $\quad \varphi(M) = \frac{1}{\det(M)}\ {}^t(\mathrm{com}(M))$ matrice des cofacteurs, sous déterminants de M

. Notons $\varphi_{ij}(M)$ le coeff (i,j) de la matrice $\varphi(M)$

φ_{ij} est une fonction rationnelle (à plusieurs variable) des coeff de M donc est continue.

Donc φ elle-même est continue.

méthode 2 $\quad$ Il s'agit de montrer que $\varphi(M+H)$ tend vers $\varphi(M)$ quand H tend vers $0_{n\times n}$ dans $M_n(\mathbb{R})$

$\forall H$ suffisamment petit, comme $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$

$M+H$ est bien inversible, et

$$(M+H)^{-1} = \left(M(I + M^{-1}H)\right)^{-1} = (I + M^{-1}H)^{-1} \times M^{-1}$$

Donc $\varphi(M+H) - \varphi(M) = \underbrace{\left((I + M^{-1}H)^{-1} - I\right)}_{(*)} M^{-1}$

On est donc ramené à ma $\quad (*) \longrightarrow 0_{n\times n}\ (H \longrightarrow 0_{n\times n})$

Or pour H assez petit pour que $\|M^{-1}H\| < 1$,

$(I + M^{-1}H)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-M^{-1}H)^n$ (série dans un evn...) on verra ça + tard ~~???~~ avec les Banach