D) Homéomorphismes

Def Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Une application $f : E \to F$ est un <u>homéomorphisme</u> si elle est
- bijective
- continue de (E, d_E) dans (F, d_F)
- d'inverse continue $f^{-1} : (F, d_F) \to (E, d_E)$

On dit que deux espaces (E, d_E) et (F, d_F) sont <u>homéomorphes</u> s'il existe un homéomorphisme de l'un dans l'autre.

Rq C'est une relat° d'éq. sur les espaces métriques.

En général, une application bijective et continue n'est pas forcément un homéo.

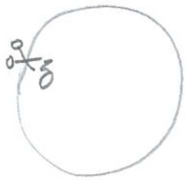
Ex (typique) $E =]-\pi, \pi]$ muni de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.

$F = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne (induite)

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ t \longmapsto (\cos t, \sin t) \end{array}$$ est bijective, continue, mais f^{-1} est discontinue au point $(-1, 0)$. En effet, on peut trouver une suite (z_n) dans S^1 convergeant vers ce point mais tq $f^{-1}(z_n) \not\to f^{-1}((-1,0)) = \pi$

par exemple $z_n = \left(\cos\left(-\pi + \frac{1}{n}\right), \sin\left(-\pi + \frac{1}{n}\right)\right)$.

En fait, <u>S^1 n'est pas homéomorphe à $]-\pi, \pi]$</u>. On peut le prouver par un <u>argument de connexité</u>. Supposons que f soit un homéo de S^1 dans $]-\pi, \pi]$ et soit $z = f^{-1}(0)$. $S^1 \setminus \{z\}$ est connexe par arcs



(si $z = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $g :]\alpha, \alpha + 2\pi[\to S^1 \setminus \{z\}$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ est une appl C^0 bijective et comme $]\alpha, \alpha + 2\pi[$ est cpa, $S^1 \setminus \{z\}$ aussi)

donc son image par f doit l'être aussi. Mais ce n'est pas le cas ! ($]-\pi, 0[\cup]0, \pi]$ n'est pas connexe par arcs)

On pourra aussi le prouver en utilisant la notion <u>de compacité</u>

Proposition Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$.

f est un homéo $\iff$ f est strictement monotone, C^0 et surjective.

Preuve $\Rightarrow$ continuité et surjectivité font partie de la définition d'homéo.

Concernant la monotonie, considérons l'application

$$\varphi : \overbrace{\{(x,y)\in I^2,\ x<y\}}^{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(y)-f(x)$$

C est un convexe de $\mathbb{R}^2$ (exercice !) donc connexe par arcs. φ est bien définie et continue sur C par composition, donc son image est connexe par arcs. Or elle ne contient pas 0, donc par TVI elle est incluse soit dans $\mathbb{R}_+^*$, auquel cas f est strictement croissante, soit dans $\mathbb{R}_-^*$, auquel cas f est strict. $\searrow$.

$\Leftarrow$ la stricte monotonie entraîne l'injectivité. Il ne reste donc plus qu'à montrer la continuité de l'application réciproque. Si f^{-1} n'est pas continue en un point $a\in J$, elle n'est pas continue à droite ou à gauche. Disons droite (la preuve est identique à gauche). Alors il existe $(x_n)_n$ convergeant vers a tq $x_n>a\ \forall n$, que l'on peut supposer décroissante quitte à extraire, et tq $f^{-1}(x_n)\not\to f^{-1}(a)$. Par stricte monotonie (disons, spdg, croissance) de f^{-1} (*), $(f^{-1}(x_n))$ est décroissante et minorée par $f^{-1}(a)$ donc convergente, vers $\alpha > f^{-1}(a)$. (car $\geq$ et $\neq$)

Mais alors $\alpha\in\,]f^{-1}(a), f^{-1}(x_0)[$, qui est inclus dans I car $f^{-1}(a), f^{-1}(x_0)\in I$ et I intervalle, donc f est continue en α, dc $\lim_{n\to+\infty} f(f^{-1}(x_n)) = f(\alpha)$ mais c'est aussi $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, donc par unicité de la limite $a = f(\alpha)$, et donc $f^{-1}(a)=\alpha$, contradiction $\square$

Proposition Les intervalles de $\mathbb{R}$ forment 5 classes d'équivalence par homéomorphismes :

- la classe de $\mathbb{R}$, qui contient tous les intervalles ouverts non vides
- la classe de $[0,+\infty[$ ——— semi-ouverts,
- ——— $[0,1]$ ——— tous les segments de longueur non nulle,
- ——— $\{0\}$ ——— tous les singletons,
- la classe de $\emptyset$, qui ne contient qu'un élément.

(*) donc de f^{-1} : soit $x<y\in J$. par surjectivité de f $\exists\, x', y'\in I$ tq $x=f(x')$ et $y=f(y')$ et comme f strictement croissante, $f(x')<f(y') \Rightarrow x'<y'$ ie $f^{-1}(x)<f^{-1}(y)$ $\square$

Preuve

- En utilisant les translations, réflexions, dilatations (qui sont des homéos), on vérifie facilement que parmi les intervalles bornés de longueur > 0
  - tous les segments sont homéomorphes,
  - les intervalles semi-ouverts sont tous homéomorphes,
  - ——— ouverts ———.

et que - tous les intervalles semi-infinis ouverts sont homéomorphes
- ——— fermés ———

Il est en outre immédiat que - tous les singletons sont homéomorphes
- ils ne sont homéomorphes à aucun autre type d'intervalle par cardinalité
- $\emptyset$ n'est homéomorphe qu'à $\emptyset$ par cardinalité.

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que

(1) $\mathbb{R}$, $]0,+\infty[$ et un intervalle ouvert borné, disons $]-1,1[$, sont homéomorphes

(2) $[0,+\infty[$ et $[0,1[$ sont homéomorphes

(3) $\mathbb{R}$, $[0,+\infty[$ et $[0,1]$ sont deux à deux non homéomorphes.

(1) $\tanh = \dfrac{\sinh}{\cosh} : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ fournit un homéo de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ (C^0, strict $\nearrow$, surjective)

Si l'on préfère : $\tan :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ fournit un homéo (mêmes raisons)

Rq pour prouver la surjectivité, les autres prop étant prouvées, il suffit de mq les limites de f aux bornes de l'intervalle de départ sont les bornes de l'intervalle d'arrivée. Le TVI permet alors de conclure.

et $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ en fournit un autre.

(2) la restriction de tanh à $[0,+\infty[$ fournit un homéo $[0,+\infty[\to [0,1[$

(3) $[0,1]$ / $[0,+\infty[$ privé de $\{0\}$ est connexe par arcs alors que $\mathbb{R}$ privé d'un point ne l'est pas. Ils ne sont dc pas homéomorphes, donc $[0,+\infty[$ / $[0,1]$ et $\mathbb{R}$ non plus (à détailler)

$[0,1]$ privé de $\{0,1\}$ est connexe par arcs, alors que $[0,+\infty[$ privé de 2 points ne l'est pas, ils ne sont dc pas homéomorphes, dc $[0,1]$ et $[0,+\infty[$ non plus.

(pour $[0,1]$, on aurait pu utiliser un argument de compacité cf § suivant)

$\square$

Rq Un homéo entre espaces métriques permet d'identifier leurs topologies au sens suivant : si $f:(E,d_E)\to(F,d_F)$ est un homéo,

(i) A est un ouvert de (E,d_E) ssi $f(A)$ est un ouvert de (F,d_F) (par def de la conti té de f et f^{-1})
(resp. fermé) (resp. fermé)
compact → + tard compact

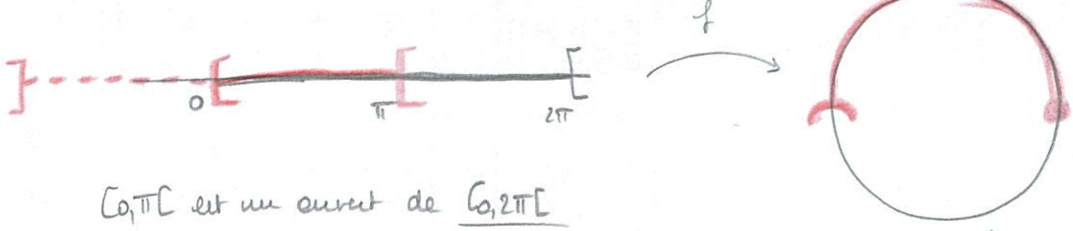
(ii) Une suite cv ds (E,d_E) ssi son image cv dans (F,d_F)

(iii) f induit une bijection entre les ccpa de E et F.

Attention, ça ne marche pas pour les propriétés métriques comme le caractère borné d'une partie ou "de Cauchy" d'une suite.

Attention 2 (i) n'est pas vrai en général si f est supposée slt C^0 (et bijective)
(C'est vrai pour les intervalles de $\mathbb{R}$ d'après la proposition ci-avant)

ex : $f : ([0,2\pi[, |\cdot|) \longrightarrow (S^1, \|\cdot\|_2)$
$t \longmapsto (\cos t, \sin t)$



$[0,\pi[$ est un ouvert de $[0,2\pi[$
(car intersection d'un ouvert de $\mathbb{R}$, $]-\pi,\pi[$, avec $[0,2\pi[$)

mais $f([0,\pi[)$ n'est pas un ouvert de S^1 (ce n'est pas un voisinage de $\{f(0)\}$ dans S^1, qui contiendrait un arc ouvert centré en $f(0)$)

On avait déjà vu dans une autre situation où on pouvait identifier deux topologies : avec les distances topologiquement équivalentes. Faisons le lien avec les homéos :

Proposition : Deux distances d_1 et d_2 sur E sont topologiqt équivalentes ssi $id : (E,d_1) \longrightarrow (E,d_2)$ est un homéomorphisme

Preuve En effet, d_1 et d_2 sont équiv ssi tout ouvert pour l'une est un ouvert pour l'autre

$\iff$ $\forall U$ ouvert de (E,d_1), U est ouvert de (E,d_2)
et $\forall V$ ______ (E,d_2), V ______ (E,d_1)

$\iff$ $\forall U$ ouvert de (E,d_1) $\left(id_{(E,d_2)\to(E,d_1)}\right)^{-1}(U)$ est un ouvert de (E,d_2)
$\forall V$ ______ (E,d_2) $\left(id_{(E,d_1)\to(E,d_2)}\right)^{-1}(V)$ ______ (E,d_1)

$\iff$ $id_{(E,d_2)\to(E,d_1)}$ et $id_{(E,d_1)\to(E,d_2)}$ sont C^0

$\Longleftrightarrow$ $id_{(E,d_1)\to(E,d_2)}$ est un homéomorphisme.

puisque id est automatiquement bijective

On a vu que si d_1 et d_2 sont induites par des normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$, elles sont topologiqt équiv. ssi les normes sont équiv. au sens : $\exists \alpha,\beta>0$ tq $\alpha\|.\|_2 \leq \|.\|_1 \leq \beta\|.\|$

Ainsi, Proposition : Si E est un e.v, $id:(E,\|\ \|_1)\to(E,\|.\|_2)$ est un homéo ssi les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.

Rq : Deux distances d_1 et d_2 sur E sont (métriquement) équivalentes ssi $id:(E,d_1)\to(E,d_2)$ est bi-lipschitzienne.

D'après ce qu'on a vu précédemment, en général, bilipschitz est en général plus fort que bicontinu.