(D) Homéomorphismes

Déf Soient (E,d_E) et (F,d_F) deux espaces métriques. Une application $f:E\to F$ est un homéomorphisme si elle est
. bijective
. continue de (E,d_E) ds (F,d_F)
. d'inverse continue
$f^{-1}:(F,d_F)\to(E,d_E)$

On dit que deux espaces (E,d_E) et (F,d_F) sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de l'un dans l'autre.

Rq C'est une relat° d'éq. sur les espaces métriques.

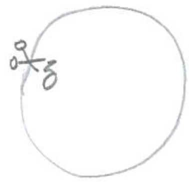
En général, une application bijective et continue n'est pas forcément un homéo.

Ex typique $E =]-\pi,\pi]$ muni de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.

$F = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne (induite)

$f: E \to F$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ est bijective, continue, mais f^{-1} est discontinue au point $(-1,0)$. En effet, on peut trouver une suite (z_n) dans S^1 convergeant vers ce point mais tq $f^{-1}(z_n) \not\to f^{-1}((-1,0)) = \pi$ par exemple $z_n = \left(\cos\left(-\pi+\frac{1}{n}\right), \sin\left(-\pi+\frac{1}{n}\right)\right)$

En fait, S^1 n'est pas homéomorphe à $]-\pi,\pi]$. On peut le prouver par un argument de connexité. Supposons que f soit un homéo de S^1 dans $]-\pi,\pi]$ et soit $z = f^{-1}(0)$. $S^1\setminus\{z\}$ est connexe par arcs



(si $z = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $g:]\alpha,\alpha+2\pi[\to S^1\setminus\{z\}$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ est une appl C^0 bijective et comme $]\alpha,\alpha+2\pi[$ est cpa, $S^1\setminus\{z\}$ aussi)

donc son image par f doit l'être aussi. Mais ce n'est pas le cas ! ($]\pi,0[\cup]0,\pi]$ n'est pas connexe par arcs)

On pourra aussi le prouver en utilisant la notion de compacité

Proposition Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f: I \to J$.
f est un homéo $\Longleftrightarrow$ f est strictement monotone, C^0 et surjective.

Rq Un homéo entre espaces métriques permet d'identifier leurs topologies au sens suivant : si $f:(E,d_E)\to(F,d_F)$ est un homéo,

(i) A est un ouvert de (E,d_E) ssi $f(A)$ est un ouvert de (F,d_F) (par def de la continuité de f et f^{-1})
(resp. fermé) (resp. fermé)
compact → trivial compact

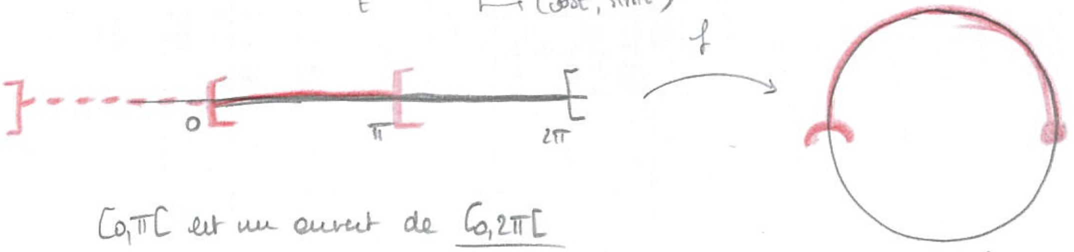
(ii) Une suite cv ds (E,d_E) ssi son image cv dans (F,d_F)

(iii) f induit une bijection entre les cc pa de E et F.

Attention, ça ne marche pas pour les propriétés métriques comme le caractère borné d'une partie ou "de Cauchy" d'une suite.

Attention 2 (i) n'est pas vrai en général si f est supposée slt C^0 (& bijective)
(C'est vrai pour les intervalles de $\mathbb{R}$ d'après la proposition ci-avant)

ex : $f:([0,2\pi[,|\cdot|)\to(S^1,\|\cdot\|_2)$
$t\mapsto(\cos t,\sin t)$



$[0,\pi[$ est un ouvert de $[0,2\pi[$ (car intersection d'un ouvert de $\mathbb{R}$, $]-\pi,\pi[$, avec $[0,2\pi[$)

mais $f([0,\pi[)$ n'est pas un ouvert de S^1 (ce n'est pas un voisinage de $\{f(0)\}$ dans S^1, qui contiendrait un arc ouvert centré en $f(0)$)

On avait déjà vu dans une autre situation où on pouvait identifier deux topologies : avec les distances topologiquement équivalentes. Faisons le lien avec les homéos :

Proposition : Deux distances d_1 et d_2 sur E sont topologiqt équivalentes ssi $id:(E,d_1)\to(E,d_2)$ est un homéomorphisme

Preuve En effet, d_1 et d_2 sont équiv ssi
$\iff$ tout ouvert pour l'une est un ouvert pour l'autre
$\iff$ $\forall U$ ouvert de (E,d_1), U est ouvert de (E,d_2)
et $\forall V$ ___ (E,d_2), V ___ (E,d_1)
$\iff$ $\forall U$ ouvert de (E,d_1) $\left(id_{(E,d_2)\to(E,d_1)}\right)^{-1}(U)$ est un ouvert de (E,d_2)
$\forall V$ ___ (E,d_2) $\left(id_{(E,d_1)\to(E,d_2)}\right)^{-1}(V)$ ___ (E,d_1)
$\iff$ $id_{(E,d_1)\to(E,d_2)}$ et $id_{(E,d_2)\to(E,d_1)}$ sont C^0

$\Longleftrightarrow$ $id_{(E,d_1)\to(E,d_2)}$ est un homéomorphisme.

puisque id est automatiquement bijective

On a vu que si d_1 et d_2 sont induites par des normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$, elles sont topologiq^t équiv. ssi les normes sont équiv. au sens : $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\alpha\|.\|_2 \leq \|.\|_1 \leq \beta\|.\|$

Ainsi, Proposition Si E est un e.v, $id : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_2)$ est un homéo ssi les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.

Rq Deux distances d_1 et d_2 sur E sont (métriquement) équivalentes ssi $id : (E,d_1) \to (E,d_2)$ est bi-lipschitzienne.

D'après ce qu'on a vu précédemment, en général, bilipschitz est en général plus fort que bicontinu.