(B) Continuité et densité

"transfert de densité" :

Proposition Si $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ est continue et surjective et si $A \subset E$ est dense alors $f(A) \subset F$ est dense.

ex d'application : On sait que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est dense.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \text{ est continue et surjective } (*)$$
$$x \mapsto e^{2i\pi x}$$

donc $f(\mathbb{Q}) = \left\{ e^{\frac{2i\pi p}{q}}, p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$ est dense dans $\mathbb{S}^1$

même chose pour $f(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}) = f(\alpha\mathbb{Z})$

(*) On munit $\mathbb{U}$ de la métrique induite par celle de $\mathbb{C}$, ie celle de $\mathbb{R}^2$.
f est C^0 ssi elle l'est vue comme fct° de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ (**)
ie, si on écrit $f = f_1 + i f_2$ avec $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ssi f_1 et f_2 sont C^0
or c'est le cas : $f_1(x) = \cos(2\pi x)$, $f_2(x) = \sin(2\pi x)$.

(**) est un fait général si $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ est une appl. et $\exists (G, d_G)$ tq $F \subset G$ et $d_F = d_{G|F\times F}$ alors f est continue ssi $\tilde{f} : (E, d_E) \to (G, d_G)$, $x \mapsto f(x)$ est continue.

En effet, f C^0 $\Leftrightarrow$ $\forall U$ ouvert de F, $f^{-1}(U)$ ouvert de E

$\Leftrightarrow$ $\forall \tilde{U}$ ouvert de G, $f^{-1}(\tilde{U} \cap F)$ ouvert de E

$\Leftrightarrow$ $\forall \tilde{U}$ ouvert de G, $\tilde{f}^{-1}(\tilde{U})$ ———

$\Leftrightarrow$ $\tilde{f} : E \to G$ C^0

Tant qu'on y est, un autre fait général oublié :

Si $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ est C^0 et si $A \subset E$ et $d_A = d_{E|A\times A}$, alors $f_{|A} : (A, d_A) \to (F, d_F)$ est continue

Preuve $\boxed{\text{exo}}$ immédiat avec ce qui précède. Le tout est de savoir ce qu'on veut montrer...

Proposition clef Si $f, g : (E, d_E) \to (F, d_F)$ sont continues et coïncident sur une partie dense $A \subset E$ alors elles coïncident partout.

(Autrement dit, si une f^{ct°} $f : A \subset E \to F$ admet un prolongement continu à E et si A est dense dans E alors le prolongement est unique)

(Bien sûr, faux en général si on n'impose pas la continuité)

Preuve Il s'agit de m.q. $V = \{x \in E,\ f(x) \neq g(x)\}$ est vide

Or c'est un ouvert. Pour le voir il faut utiliser la continuité

Méthode 1 Soit on le fait à la main : soit $x_0 \in V$. $d_F(f(x_0), g(x_0)) = \varepsilon > 0$

$\varepsilon/2 > 0$ donc $\exists \eta_1 > 0$ tq $\forall x \in B(x_0, \eta_1)$, $d_F(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ ($f\ C^0$)

$\exists \eta_2 > 0$ ——— η_2, $d_F(g(x), g(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ ($g\ C^0$)

mais alors $\forall x \in B(x_0, \min(\eta_1, \eta_2))$,

$d_F(f(x_0), g(x_0)) \leq d_F(f(x_0), f(x)) + d_F(f(x), g(x)) + d_F(g(x), g(x_0))$

dc $\varepsilon < \varepsilon + d_F(f(x), g(x))$

et dc $d_F(f(x), g(x)) > 0$, soit $f(x) \neq g(x)$, donc $x \in V$.

Méthode 2 Notons $W = \{(y, y),\ y \in F\} \subset F \times F$

C'est la diagonale du produit $F \times F$

Fait général (sera vrai aussi en topo générale) : si $F \times F$ est muni de la distance produit (en général : de la topologie produit), la diagonale est un fermé de $F \times F$

Exo

Exercice (cela ressemble bcp à ci-dessus)

donc son complémentaire est un ouvert. Or l'application

$(f, g) : E \to F \times F$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ est continue (chaq composante l'étant)

et V est l'im. récip par cette appl de ^{c}diag donc V est ouvert

Or V ne rencontre pas A puisque sur A, $f = g$, et A est dense, donc

nécessairement $V = \emptyset$ $\square$

Application 1

Proposition : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue (pour la dist. usuelle) et vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$, alors f est linéaire

Dem :
- en prenant $x = y = 0$ on voit que $f(0) = 0$
- ——— $y = -x$ on voit que $f(-x) = -f(x)$

) en fait vrai pour tt morphisme de groupe additif

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k.x) = k f(x)$
- Si $x = p/q \in \mathbb{Q}$, $\underset{\substack{\parallel \\ p f(1)}}{f(p)} = f(qx) = q f(x)$ dc $f(x) = f(1) \cdot x$
- $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(1) \times x$ sont C^0 et coïncident sur $\mathbb{Q}$, dense dans $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$, dc f est une forme linéaire.

Remarque : Faux si on ne suppose pas f C^0. idée construire une fonction $\mathbb{Q}$ linéaire mais pas $\mathbb{R}$ linéaire grâce à la base incomplète (mais nécessite du coup l'axiome du choix) :

1 et $\sqrt{2}$ sont lin. indep sur $\mathbb{Q}$ (car $\sqrt{2}$ est irrationnel), on peut donc compléter $1, \sqrt{2}$ en une base $(e_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$ ev, et donc construire une appli $\mathbb{Q}$ linéaire f tq $f(1) = 1$ et $f(\sqrt{2}) = 0$ alors cette appl satisfait bien $f(x+y) = f(x) + f(y)$, mais $\underbrace{f(\sqrt{2})}_{0} \neq \underbrace{\sqrt{2} f(1)}_{\sqrt{2}}$

(C) Continuité et connexité par arcs

Def Une partie $A \subset E$ d'un espace métrique (E, d_E) est connexe par arcs si pour tout $(x,y) \in A^2$, $\exists\, \gamma : ([0,1], d_{|.|}) \longrightarrow (E, d_E)$ continue tq $\gamma(0) = x$, et $\gamma(1) = y$ et $\gamma(t) \in A\ \forall t \in [0,1]$.

"en un seul morceau"

exemples
- Un evn est connexe par arcs : Étant donnés $x, y \in E$, $t \longmapsto (1-t)x + ty$ est continue (appl affine sur un evdf) fournit le chemin voulu.
- $A = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ n'est pas connexe. Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ C^0 tq $\gamma(0) = -1$ et $\gamma(1) = 1$, par TVI, $\exists\, t \in]0,1[$, $\gamma(t) = 0$ mais $0 \notin A$.
- les parties connexes par arc de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. (cf ci-après)
- l'union / l'intersection de parties cpa n'est pas forcément cpa

ex !

- les boules ouvertes et fermées d'un evn sont cpa
  les sphères aussi à partir de la dimension 2 (exo ?)

Plus généralement,

Def Une partie $A \subset (E, \|\cdot\|_E)$ (evn) est convexe si $\forall x,y \in A$, $\forall t \in [0,1]$, $(1-t)x + ty \in A$ (ou encore : le segment $[x,y] \subset A$)

ex les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (on peut le prendre comme définition)

Prop convexe $\Rightarrow$ connexe par arcs

- les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes par arcs. Réciproquement, tout sous-ensemble c.p.a de $\mathbb{R}$ est un intervalle (preuve : TVI)
- ~~tte~~ boule est convexe (donc connexe par arcs)

(Exo) On définit sur (E, d_E) une relation d'équivalence :

$x \mathcal{R} y \iff$ il existe un arc continu joignant x à y

Def les classes d'éq de cette relation sont les c.c. par arcs de (E, d_E)

preuve du fait que R est une relation d'équivalence

- réflexivité immédiate. Prendre $\gamma = \tilde{x}$
- symétrie : si γ joint x à y, $t \mapsto \gamma(1-t)$ joint y à x
- transitivité si γ_1 joint x à y et γ_2 joint y à z, on définit

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow E$$
$$t \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

γ est continue sur les fermés $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$ par composition, donc elle l'est sur leur réunion $[0,1]$.

---

exemples de composantes connexes par arcs :

- les ccpa de $(\mathbb{N}, d_{|.|})$ sont les singletons
- $\mathbb{R}$ a une seule ccpa, $\mathbb{R}$ tout entier
- $(\mathbb{Q}, d_{|.|})$ a pour ccpa les singletons également, mais la $\neq$ce avec $\mathbb{N}$ est que ceux ci ne sont pas isolés.

Proposition : Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application continue. Si $A \subset E$ est connexe par arcs, $f(A) \subset F$ l'est aussi

Preuve Soient $y_0, y_1 \in f(A)$. Il existe $x_0, x_1 \in A$ tq $y_i = f(x_i)$. Comme A est cpa, $\exists \gamma\ C^0 : [0,1] \to E$ joignant x_0 à x_1. Mais alors $f \circ \gamma : [0,1] \to F$ est continue par composition et joint y_0 à y_1 $\left((f \circ \gamma)(i) = f(\gamma(i)) = f(x_i) = y_i\right)$. □

Application : S^1 est connexe par arcs (l'appl C^0 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{2i\pi x}$ a pour image S^1