7 Fonctions continues

7.A Définitions et premières propriétés

Définition. Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques et f une application de E dans F.

1. On dit que f est continue en a (de (E, d_E) dans (F, d_F)) si l'une des proporiétés équivalentes suivantes est satisfaite :
   (a) (versions métriques) $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall x \in E, d_E(x, a) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon$;
   ce qui équivaut à : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ f\left(B_{d_E}(a, \eta)\right) \subset B_{d_F}(f(a), \varepsilon)$;
   ou encore : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ B_{d_E}(a, \eta) \subset f^{-1}\left(B_{d_F}(f(a), \varepsilon)\right)$;
   (b) (version topologique) pour tout voisinage V de $f(a)$ dans (F, d_F), $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a dans (E, d_E).
2. On dit que f est continue (de (E, d_E) dans (F, d_F)) si elle est continue en tout point de E. C'est équivalent à :
   (caractérisation topologique) pour tout ouvert U de (F, d_F), $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (E, d_E).

Preuve des équivalences. 1. Les trois formulations de (a) sont synonymes. Supposons (a) satisfaite. Soit V un voisinage de $f(a)$. Par définition, il contient une boule $B_{d_F}(f(a), \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$, donc $f^{-1}(V)$ contient $f^{-1}\left(B_{d_F}(f(a), \varepsilon)\right)$ qui lui-même contient une boule ouverte centrée en a, donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a.

Réciproquement, supposons (b) satisfaite. Soit $\varepsilon > 0$. $V := B_{d_F}(f(a), \varepsilon)$ est un voisinage (ouvert) de $f(a)$, donc d'après (b), $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a, donc contient une boule ouverte centrée en a, $B_{d_E}(a, \eta)$ avec $\eta > 0$, ce qu'on voulait.

2. Supposons f continue en tout point de a. Soit U un ouvert de (F, d_F). U est un voisinage de chacun de ses points, donc par (b), $f^{-1}(U)$ est un voisinage de chacun de ses points, donc un ouvert de (E, d_E). Réciproquement, supposons la caractérisation topologique satisfaite. Alors pour tout $a \in E$, pour tout voisinage V de $f(a)$, V contient un ouvert contenant $f(a)$, donc $f^{-1}(V)$ contient un ouvert contenant a, donc est un voisinage de a. □

Remarque.
1. Si E est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, tous deux munis de la distance associée à la valeur absolue, la définition 1.a. coïncide avec celle donnée au chapitre 1.
2. Comme dans $\mathbb{R}$, ceci est la *definition*. Dans la pratique, on montre que certaines fonctions de référence sont continues, puis on utilise des théorèmes de compositions (cf. ci-après). Moralité : il ne faut pas toujours "revenir aux ε".
3. D'après la caractérisation topologique, la continuité ne dépend que des ouverts de E et F, i.e. de la topologie définie par d_E et d_F. En particulier, si d'_E et d'_F sont des distances topologiquement équivalentes à d_E et d_F respectivement, une application $f : E \to F$ est continue de (E, d_E) dans (F, d_F) si et seulement si elle l'est de (E, d'_E) dans (F, d'_F).
4. Exercice. Deux distances d et d' sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si id_E est continue de (E, d) dans (E, d') et de (E, d') dans (E, d).

Comme dans $\mathbb{R}$, on peut caractériser la continuité *entre espaces métriques* à l'aide des suites :

Proposition (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Une application $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ est continue en $a \in E$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a dans (E, d_E), la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ dans (F, d_F).*

Démonstration. Exercice. Adapter la preuve dans $\mathbb{R}$ du chapitre 1. □

Exemples.
1. Utilisons les différentes définitions et caractérisations pour montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valant 1 sur $[0, +\infty[$ et 0 ailleurs n'est pas continue en 0.

— Par la caractérisation séquentielle : $\lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = 0 \neq 1 = f(\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}))$.
— Par la définition version métrique : pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, quel que soit $\eta > 0$, il existe $x \in]-\eta, \eta[$ (n'importe quel $x < 0$) tel que $|f(x) - f(a)| = 1 < \frac{1}{2}$.
— Par la définition version topologique : $V =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ est un voisinage de $f(0)$ mais $f^{-1}(V) = \mathbb{R}_+$ n'est pas un voisinage de 0.

2. Si δ est la distance discrète sur un ensemble E, pour tout espace métrique (F, d_F), toute application de E dans F est continue de (E, δ) dans (F, d_F).
3. Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) des espaces métriques et $d_\times$ la distance produit sur $E = E_1 \times E_2$. Alors les projections $\pi_i : (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mapsto x_i \in E_i$ sont continues de $(E_1 \times E_2, d_\times)$ dans (E_i, d_i).

   C'est immédiat avec la caractérisation séquentielle car on a déjà vu que pour toute suite $(u_n = (u_n^1, u_n^2))_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $(u_n)_n$ converge vers $l = (l_1, l_2)$ pour la distance produit si et seulement si $(u_n^1 = \pi_1(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n^2 = \pi_2(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l_1 et l_2 pour les distances d_1 et d_2 respectivement.

   Si l'on veut utiliser la caractérisation topologique. On peut commencer par :

   Exercice. Si (E_1, d_1) et (E_2, d_2) sont des espaces métriques, les ouverts de $E_1 \times E_2$ muni de la distance produit $d_\times$ sont *les réunions* d'ensembles de la forme $U_1 \times U_2$ avec U_1 et U_2 ouverts de (E_1, d_1) et (E_2, d_2) respectivement.
   On en déduit la continuité des projections : pour tout ouvert U_i de (E_i, d_i), $\pi_i^{-1}(E_i) = U_1 \times E_2$ si $i = 1$ et $E_1 \times U_2$ si $i = 2$, qui est un ouvert de $(E_1 \times E_2, d_\times)$ dans tous les cas.

On introduit également deux notions plus fortes, qui joueront des rôles importants dans les chapitres à venir :

Définition. Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques et f une application de E dans F.

1. On dit que f est uniformément continue (de (E, d_E) dans (F, d_F)) si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in E^2, d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
2. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est k-lipschitzienne (de (E, d_E) dans (F, d_F)) si
$$\forall (x, y) \in E^2, d_F(f(x), f(y)) \leq k \cdot d_E(x, y).$$
3. On dit que f est contractante s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que f est k-lipschitzienne.

Exercice. Avec les notations ci-dessus,
$$\forall f : E \to F,\ f \text{ contractante} \Rightarrow f \text{ lipschitzienne} \Rightarrow f \text{ unif. } C^0 \Rightarrow f \text{ continue}$$
et aucune des implications réciproques n'est vraie.

On a vu en particulier que si A était une partie de E, l'application $x \in E \mapsto \mathrm{dist}(x, A)$ était 1-lipschitzienne de (E, d_E) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Elle est donc continue.

Proposition ("Opérations" sur les applications continues)**.**

1. (Composition) *Soient (E, d_E), (F, d_F) et (G, d_G) des espaces métriques, et $a \in E$. Si $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ est continue en a et $g : (F, d_F) \to (G, d_G)$ est continue en $f(a)$ alors $g \circ f : (E, d_E) \to (G, d_G)$ est continue en a.*
2. (Continuité composante par composante) *Soient (E, d_E), $(F_1, d_1), \ldots, (F_n, d_n)$ des espaces métriques, $a \in E$ et $f : x \in E \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in F_1 \times \cdots \times F_n$. Alors f est continue en a de (E, d_E) dans $F_1 \times \cdots \times F_n$ muni de la distance produit associée aux d_i si et seulement si les f_i sont continues en a de (E, d_E) dans (F_i, d_i).*

3. (Somme et produit par un scalaire) *Soit* (E, d_E) *un espace métrique et* (F, d_F) *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'une distance associée à une norme* $\|\cdot\|_F$ *sur* F*. Si* f *et* $g : (E, d_E) \to (F, d_F)$ *sont continues en* a*, alors* $f+g$ *et* λf *aussi, quel que soit* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*
4. (Produit et quotient de fonctions) *Soit* (E, d_E) *un espace métrique. Si* f *et* $g : (E, d_E) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ *sont continues en* a*, alors* $f \times g$ *aussi, et si en outre* g *ne s'annule pas,* f/g *aussi.*
5. (Restriction à la source et au but) *Soient* (E, d_E) *et* (F, d_F) *des espaces métriques,* $A \subset E$*,* $B \subset F$ *et* $f : E \to F$*.*
   Si f *est continue de* (E, d_E) *dans* (F, d_F)*,* $f_{|A}$ *est continue de* A *muni de la distance induite dans* (F, d_F)*. Si en outre* $f(E) \subset B$*, l'application* $\tilde{f} : x \in E \mapsto f(x) \in B$ *est continue de* (E, d_E) *dans* B *muni de la distance induite.*

Applications.

1. Toute application polynômiale à k variables, i.e. combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mapsto x_1^{j_1} \dots x_k^{j_k} \in \mathbb{R}$ avec $j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N}$, est continue de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ (et donc $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ pour n'importe quelle norme, par équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$, à venir) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, comme combinaison linéaire (cf. 3 de la prop.) de produits (cf. 4) des applications $\pi_i : (x_1, \dots, x_k) \mapsto x_i$ qui le sont (cas particulier de l'exemple 3 ci-dessus).
2. L'application det est polynomiale donc continue de $(M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. En effet, $\det((a_ij)_{i,j}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$. Par conséquent, $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.
3. L'application $\phi : A \in GL(n, \mathbb{R}) \mapsto A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ est continue (en munissant $GL(n, \mathbb{R})$ de la distance induite). En effet, si on note ϕ_{ij} les composantes $A \mapsto (A^{-1})_{ij} \in \mathbb{R}$ de ϕ, chacune est rationnelle (quotient d'applications polynomiales, le dénominateur ne s'annulant pas) : si $A = (a_{ij})_{i,j}$, $\phi_{ij}(A) = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j} \det(M(i,j))$, où $M(i,j)$ est la matrice A à laquelle on a ôté la i-ième ligne et la j-ième colonne. Donc chaque composante est continue par le 4 de la prop. et ce qui précède, et donc ϕ est elle-même continue par le 2. de la prop.

   On verra une autre preuve dans le cas plus général des isomorphismes continus d'espaces *de Banach* (chap. 4).

Preuve de la proposition. Ci-dessous, on évite au maximum les arguments à base de suites, même si elles sont parfois plus élémentaires, afin d'obtenir des preuves qui resteront valables dans un cadre plus général.

1. Soit V un voisinage de $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ dans (G, d_G). Par continuité de g en $f(a)$, $g^{-1}(V)$ est un voisinage de $f(a)$ dans (F, d_F), et alors par continuité de f en a, $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$ est un voisinage de a, ce qu'on voulait.

2. Si f est continue, alors pour chaque i, $f_i = \pi_i \circ f$ l'est aussi par composition, avec π_i la projection sur le i-ième facteur de $F = F_1 \times \dots \times F_n$ (cf. exemple ci-avant). Pour la réciproque, on verra la preuve générale (utilisant la caractérisation topologique de la continuité) quand on parlera de *topologie produit* au chapitre 3. Avec des suites : soit $a \in E$ et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $a \in E$. Si toutes les f_i sont continues, $(f_i(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f_i(a)$ pour chaque i (pour la distance d_i), ce qui entraîne (cf. Â§3 sur la convergence des suites) que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$ pour la distance produit. Ceci montre que f est continue en a grâce à la caractérisation séquentielle de la continuité.

3 et 4. On commence par démontrer le résultat important suivant :

Proposition. *Soit* $(F, \|\cdot\|_F)$ *un* $\mathbb{K}$*-evn. On note* $\|\cdot\|_{F \times F}$ *la norme sur* $F \times F$ *définie par :* $\|(u,v)\|_{F \times F} = \max(\|u\|_F, \|v\|_F)$ *et* $\|\cdot\|_{\mathbb{K} \times F}$ *la norme sur* $\mathbb{K} \times F$ *définie par :* $\|(\lambda, u)\|_{\mathbb{K} \times F} = \max(|\lambda|, \|u\|_F)$ *Alors l'addition :*

$$\begin{array}{ccc} (F \times F, \|\cdot\|_{F \times F}) & \to & (F, \|\cdot\|_F) \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

et la multiplication scalaire :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}\times F, \|\cdot\|_{\mathbb{K}\times F}) & \to & (F, \|\cdot\|_F) \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda u \end{array}$$

sont continues.

Démonstration. L'addition A est 2-lipschitzienne : pour tous (u, v) et $(u', v') \in F \times F$,

$$\begin{aligned} \|A(u,v) - A(u',v')\|_F &= \|u + v - (u' + v')\|_F \\ &= \|(u - u') + (v - v')\|_F \\ &\leq \|u - u'\|_F + \|v - v'\|_F \\ &\leq 2\max(\|u - u'\|_F, \|v - v'\|_F) \\ &= 2\|(u,v) - (u',v')\|_{F\times F}. \end{aligned}$$

Pour la multiplication M, on utilise le critère séquentiel : soit $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times F$ et soit une suite $((\lambda_n, u_n)) \in (\mathbb{K}\times F)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers (λ, u) pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{K}\times F}$, ce qui signifie que $\|u_n - u\|_F$ et $|\lambda_n - \lambda|$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini. Alors

$$\begin{aligned} \|\lambda_n u_n - \lambda u\|_F &= \|(\lambda_n u_n - \lambda u_n) + (\lambda u_n - \lambda u)\|_F \\ &\leq \|(\lambda_n - \lambda)u_n)\|_F + \|\lambda(u_n - u)\|_F \text{ par inégalité triangulaire} \\ &= \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|u_n\|_F}_{\text{borné}} + |\lambda| \cdot \underbrace{\|u_n - u\|_F}_{\to 0} \text{ par homogénéité,} \end{aligned}$$

donc $(\|M(\lambda_n, u_n) - M(\lambda, u)\|_F)_n$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$, i.e. $(M(\lambda_n, u_n))_n$ converge vers $M(\lambda, u)$. Ceci prouve la continuité par critère séquentiel. $\square$

On revient à 3. Avec les notations ci-dessus et celles de l'énoncé (et toujours les mêmes normes), $f+g = A\circ(f,g)$, avec A continue (cf. ci-dessus) et $(f,g) : x \in E \mapsto (f(x), g(x)) \in F\times F$ continue d'après 2. Donc $f+g$ est continue par composition. De façon similaire, $\lambda f = M \circ (\lambda, f)$ avec M continue et $(\lambda, f) : x \in E \mapsto (\lambda, f(x)) \in \mathbb{K} \times F$ continue par 2.

Pour le 4, $f \times g = M \circ (f,g)$ (avec cette fois-ci $(F, \|\cdot\|_F) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$) est continue par composition. En outre, $I : t \in \mathbb{K}^* \mapsto 1/t \in \mathbb{K}$ est continue donc si g ne s'annule pas, $1/g = I \circ g$ est continue, et donc $f/g = M \circ (f, 1/g)$ est continue par composition.

5. (là encore on évite les suites) Le point clef est le lemme suivant, dont la preuve est laissée en Exercice :

Lemme. *Les ouverts de A pour la distance induite par d_E sont les intersections avec A des ouverts de (E, d_E).*

Alors, pour tout ouvert U de (F, d_F), $(f_{|A})^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$ est un ouvert de A pour la distance induite puisque $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (E, d_E) par continuité de f, donc $f_{|A}$ est continue.

Pour le deuxième point, si V est un ouvert de B pour la distance induite, il existe U ouvert de (F, d_F) tel que $V = B\cap U$, et alors $\tilde{f}^{-1}(V) = f^{-1}(B\cap U) = f^{-1}(B)\cap f^{-1}(U) = E\cap f^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ est un ouvert de (E, d_E) par continuité de f, donc $\tilde{f}$ est continue. $\square$