§6. intérieur, adhérence, frontière, densité

Déf Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$

- On dit qu'un point a de A est un point intérieur de A s'il existe $r>0$ tq $B(a,r) \subset A$.
  L'ensemble des points intérieurs de A est appelé intérieur de A dans E et noté $\mathring{A}$
- On dit qu'un point $x \in E$ est adhérant à A si $\forall \varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon)$ rencontre A ie $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

  L'ensemble des pts adhérents à A est appelé adhérence de A dans E et noté $\bar{A}$.
- L'ensemble $\bar{A} \setminus \mathring{A}$ est appelé frontière de A dans E et noté ∂A.

Ce sont les déf les + intuitives, mais on va voir tout de suite des déf équivalentes parfois + faciles à manipuler et qui ont l'avantage de ne pas utiliser la distance, et de d'avoir un sens dès qu'on connait les ouverts et fermés d'un espace, ie sa topologie

Ex dans $(\mathbb{R}, d_{|.|})$, $A =]0,1]$: tout point de $]0,1[$ est intérieur à A, 1 ne l'est pas
tout point de $[0,1]$ est adhérent à A et ce sont les seuls.

donc $\mathring{A} =]0,1[\subset A \subset \bar{A} = [0,1]$

Ces inclusions sont un fait général : $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$, direct à partir de la définition.

Exo Rq $\bar{A} = \{x \in E, d(x,A) = 0\}$. Ainsi $\bar{A}$ est l'ensemble des zéros d'une fct° lip. En particulier, tout fermé est l'ensemble des zéros d'une fonction lipschitzienne.

Caractérisation topologique :

1) • $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A (au sens où : $\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans A et $\forall$ V ouvert $\subset A$, $V \subset \mathring{A}$), autrement dit, $\mathring{A} = \bigcup_{V \text{ ouvert} \subset A} V$

2) • $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A (au sens où : $\bar{A}$ est un fermé contenant A et $\forall F$ fermé $\supset A$, $\bar{A} \subset F$), autrement dit, $\bar{A} = \bigcap_{F \text{ fermé} \supset A} F$

Preuve 1) • $\mathring{A}$ est ouvert : Soit $a \in \mathring{A}$. $\exists r>0$ tq $B(a,r) \subset A$.
Vérifions que $B(a,r) \subset \mathring{A}$. En effet, $\forall x \in B(a,r)$, $B(x, \underbrace{r - d(x,a)}_{>0}) \subset B(a,r)$ par inégalité $\triangle$
donc x est aussi intérieur à A

- Soit V un ouvert inclus dans A. $\forall x \in V$, $\exists \delta > 0$ tq $B(x,\delta) \subset V \subset A$ donc x est intérieur à A donc $x \in \mathring{A}$. Ainsi $V \subset \mathring{A}$
- (*) c'est bien équivalent à $\mathring{A} \overset{(**)}{=} \bigcup_{V \subset A \text{ ouvert}} V$ car (*) $\Rightarrow$ $\mathring{A}$ contient $\bigcup_{V \subset A \text{ ouvert}} V$
et $\mathring{A}$ ouvert $\Rightarrow$ $\mathring{A} \subset \bigcup_{V \subset A \text{ ouvert}} V$
d'où l'égalité

et réciproquement (**) $\Rightarrow$ $\mathring{A}$ ouvert comme réunion d'ouvert et par def $\mathring{A}$ contient ts les ouverts inclus dans A.

2) • Observons que $\boxed{{}^c(\bar{A}) = (\mathring{{}^cA})}$. En effet,

si $x \in {}^c(\bar{A})$, $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ ie tq $B(x,\varepsilon) \subset {}^cA$ donc $x \in (\mathring{{}^cA})$

réciproquement, même chose !

et du coup $\quad \bar{A} = {}^c\left((\mathring{{}^cA})\right) = {}^c\left(\bigcup_{\substack{V \subset {}^cA \\ \text{ouvert}}} V\right)$

$$= \bigcap_{\substack{V \subset {}^cA \\ \text{ouvert}}} {}^cV$$

Mais $\quad V$ est un ouvert inclus dans ${}^cA \iff {}^cV$ est un fermé contenant A

et on trouve bien $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ \supset A}} F$, dc $\bar{A}$ est le + petit fermé contenant A.

Rq1 il y a toujours au moins un ouvert inclus dans A ($\emptyset$) et un fermé contenant A (E)

Rq2 On a de la même façon $\boxed{{}^c(\mathring{A}) = \overline{({}^cA)}}$ et par suite

$$\boxed{\partial({}^cA)} = \overline{{}^cA} \setminus (\mathring{{}^cA}) = {}^c(\mathring{A}) \setminus {}^c(\bar{A}) = {}^c(\mathring{A}) \cap \underbrace{{}^c({}^c\bar{A})}_{\bar{A}} = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \boxed{\partial A}$$

Rq3 $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap \overline{{}^cA}$ donc

Prop $\quad \forall x \in E, \; x \in \partial A$ ssi $\forall r > 0$, $B(x,r)$ intersecte A et ${}^cA$

Rq4 • $A \subset E$ est un ouvert ssi $\mathring{A} = A$

• $A \subset E$ est un fermé ssi $\bar{A} = A$

Mise en garde l'intérieur, l'adhérence et le bord sont définis par rapport à l'espace ambient E et en dépendent !

Considérons $(E,d) = (\mathbb{R}, d_{1,1})$ et $A = \mathbb{Z}$

dans (E,d), • $\mathring{A} = \emptyset$ $\left(\forall k \in \mathbb{Z}, \nexists\, r > 0 \text{ tq } \underbrace{B_{(\mathbb{R},d_{1,1})}(k,r)}_{} \subset \mathbb{Z} \right)$

un intervalle ouvert non vide contient des nb non entiers !

• $\bar{A} = A$ (A est fermé : ttesuite d'entiers qui cv ds $\mathbb{R}$ est stationnaire dc cv dans $\mathbb{Z}$)

• $\partial A = A$

Dans $(\mathbb{Z}, d_{|.|})$ (c'est un espace métrique !)

A est l'espace tt entier donc ouvert et fermé donc $\bar{A} = \mathring{A} = A$

pour éviter le doute on devrait écrire $Adh_E(A)$, $Int_E(A)$, $Fr_E(A)$.

Exemple Si $(E, \| \|)$ est un evn et $A \subset E$ satisfait $\underbrace{B(x,r) \subset A \subset \bar{B}(x,r)}_{\text{pour un } x \in E \text{ et un } r > 0}$ (boule fermée)

Alors $\mathring{A} = B(x,r)$ et $\bar{A} = \bar{B}(x,r)$

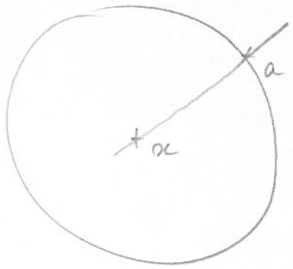
en effet, $B(x,r)$ est un ouvert inclus ds A donc $B(x,r) \subset \mathring{A}$

et : si $a \in A \setminus B(x,r)$, $\|x-a\| = r$, mais alors $\forall \varepsilon > 0$,

$$\overbrace{a + \frac{\varepsilon}{2r}(a-x)}^{\in E} \in B(a, \varepsilon)$$

$$\left(\|a - (a + \frac{\varepsilon}{2r}(a-x))\| = \frac{\varepsilon}{2}\frac{r}{r} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \right)$$

mais $\notin A$



$$\|x - (a + \frac{\varepsilon}{2r}(a-x))\| = \|(x-a)(1+\frac{\varepsilon}{2r})\|$$
$$= r(1+\frac{\varepsilon}{2r}) > r$$

donc $\notin \bar{B}(x,r)$ qui contient A.

Donc a n'est pas intérieur à A. On a donc bien $\mathring{A} = B(x,r)$

Exo preuve pour l'adhérence

⚠ la preuve ne marche plus si E n'est pas un evn ($a + \frac{\varepsilon}{2r}(a-x)$ n'a pas de sens !)

et en général on aura simplement $B(x,r) \subset \mathring{A}$ (puisque c'est un ouvert inclus dans A)

et $\bar{A} \subset \bar{B}(x,r)$ (puisque c'est un fermé qui contient A)

Avant de donner d'autres exemples on va donner une autre caractérisation de l'adhérence. attention, elle ne se généralisera pas à tous les espaces topologiques

Proposition (critère séquentiel d'adhérence) Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Alors $\forall x \in E$,

$\underset{(i)}{x \in \bar{A}} \iff \underset{(ii)}{\text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ qui cv vers } x \text{ dans } E}$.

Preuve (ii) ⟹ (i) (toujours vrai)

Soit $x \in E$ tq $\exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq (x_n) cv vers x. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$. donc en particulier $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$
Ceci signifie précisément que $x \in \overline{A}$.

(i) ⟹ (ii) Supposons que $x \in \overline{A}$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$. Cela nous donne bien une suite d'éléments de A qui cv vers x puisque $d(x, x_n) < \frac{1}{n} \to 0$ □

Nouveaux exemples

Dans $(\mathbb{R}, d_{|.|})$, • $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ tout entier : tt élt de $\mathbb{R}$ est limite de suite de rationnels (cf densité, vue dans le chap 1)

• $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$. En effet, soit $a \in \mathbb{Q}$ et $r > 0$. $B_{|.|}(a,r) =]a-r, a+r[$
cet intervalle n'est pas inclus dans $\mathbb{Q}$. En effet, cet intervalle est un ensemble non dénombrable (car en bijection ac $\mathbb{R}$. le montrer) et $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc a n'est pas intérieur à $\mathbb{Q}$.

Rq ceci équivaut à dire que ${}^c\left(\overline{{}^cA}\right) = \emptyset$ soit $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
ou encore $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est (lui aussi) dense dans $\mathbb{R}$.

Def Un sous-ens A d'un espace métrique (E,d) est dense dans E si $\overline{A} = E$.

Par def de l'adhérence, cela revient à : $\forall x \in E$, $\forall$ boule B centrée en x, $B \cap A \neq \emptyset$
Autrement dit : A rencontre tte boule ouverte, ou encore A rencontre tout ouvert, ou encore ${}^cA$ ne contient aucun ouvert (donc est d'intérieur vide) ou encore, ac le critère séquentiel, tt élt de E est limite d'élts de A.

Autre exemple de sous-ensemble dense : $GL_n(\mathbb{R}) \subset \underbrace{M_n(\mathbb{R})}$, que l'on munit de la norme $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$ (on verra que ça n'a en fait pas d'importance)
Il s'agit de vérifier que tte boule ouverte de $M_n(\mathbb{R})$ rencontre $GL_n(\mathbb{R})$. Soit donc $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Considérons le polynôme caract de A $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$
C'est un polynôme de degré n donc il a un nb fini de racine. Il existe donc $\lambda \in]0, \varepsilon[$ tq $\chi_A(\lambda) \neq 0$, ie tq $A - \lambda I_n$ inversible. Et $\|A - (A - \lambda I_n)\| = \lambda < \varepsilon$ donc on a ce qu'on voulait

Application Existence de la décomposition polaire :

toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s'écrit $A = SU$ avec S symétrique positive et U orthogonale (en + de + unicité si $A \in GL_n(\mathbb{R})$)

Preuve • On traite d'abord le cas $A \in GL_n(\mathbb{R})$

A^tA est sym def. positive donc admet une racine carrée S qui est elle aussi sym def positive donc en particulier inversible. Posons $U = S^{-1}A$

Alors ${}^tUU = {}^tA\,{}^tS^{-1}S^{-1}A = {}^tA(S^2)^{-1}A = {}^tA(A^tA)^{-1}A = I_n$

donc U est orthogonale et on a bien $A = SU$

• Cas général. $A \in M_n(\mathbb{R})$. Par densité de GL_n dans M_n il existe une suite (A_m) de mat. inversibles convergeant vers A. Chacune admet une décomp. polaire $A_n = S_nU_m$. Or $O_n(\mathbb{R})$ est compact donc on (dans un evn df c'est fermé borné vous connaissez) on peut extraire une sous suite $(U_{\varphi(m)})$ CV vers U et alors on a $S_{\varphi(m)} = A_{\varphi(m)}U_{\varphi(m)}^{-1}$ qui CV vers $S = AU^{-1}$. Reste à vérifier que S est symétrique positive (ce sont des conditions fermées) et on a gagné

Adhérence et valeurs d'adhérence d'une suite :

⚠ $VA((u_n)) \neq \overline{\{u_n, n\in\mathbb{N}\}}$ (en général, $\{u_n, n\in\mathbb{N}\} \not\subset VA(u)$, ils peuvent même être disjoints : $u_n = \frac{1}{n} > 0$, $VA(u) = 0$)

<u>Prop</u> $\boxed{VA((u_n)) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k, k\geq m\}}}$ (en particulier c'est un ensemble fermé)

<u>Preuve</u> Posons A l'ensemble de droite. Soit $x\in E$.

$$
\begin{aligned}
x\in A &\iff \forall m\in\mathbb{N},\ x\in \overline{\{u_k, k\geq m\}}\\
&\iff \forall m\in\mathbb{N},\ \forall \varepsilon>0,\ B(x,\varepsilon)\cap\{u_k, k\geq m\}\neq\emptyset\\
&\iff \forall m\in\mathbb{N},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists k\geq m \text{ tq } u_k\in B(x,\varepsilon)\\
&\iff \forall\varepsilon>0,\ \forall m\in\mathbb{N},\ \exists k\geq m \text{ tq } u_k\in B(x,\varepsilon)\\
&\iff \forall\varepsilon>0,\ \{k\in\mathbb{N}, u_k\in B(x,\varepsilon)\} \text{ est non majoré}\\
&\iff \forall\varepsilon>0,\ \#\{k\in\mathbb{N}, u_k\in B(x,\varepsilon)\} = +\infty\\
&\iff x\in VA(u).
\end{aligned}
$$

<u>Corollaire</u> $\boxed{VA(u) \text{ est fermé}}$