<u>Application</u> Existence de la décomposition polaire :

toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s'écrit $A = SU$ avec S symétrique positive et U orthogonale
(en a de + unicité si $A \in GL_n(\mathbb{R})$)

<u>Preuve</u> • On traite d'abord le cas $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$A\,{}^tA$ est sym déf. positive donc admet une racine carrée S qui est elle aussi
sym déf positive donc en particulier inversible. Posons $U = S^{-1}A$

Alors ${}^tUU = {}^tA\,{}^tS^{-1}S^{-1}A = {}^tA(S^2)^{-1}A = {}^tA(A\,{}^tA)^{-1}A = I_n$

donc U est orthogonale et on a bien $A = SU$

• <u>Cas général</u>. $A \in M_n(\mathbb{R})$. Par densité de GL_n dans M_n il existe une
suite (A_m) de mat. inversibles convergeant vers A. Chacune admet
une décomp. polaire $A_n = S_nU_n$. Or $O_n(\mathbb{R})$ est compact donc on
on peut extraire une sous suite (dans un evn df c'est juste fermé borné vous connaissez)
$(U_{\varphi(n)})$ CV vers U et alors on a $S_{\varphi(n)} = A_{\varphi(n)}U_{\varphi(n)}^{-1}$
qui CV vers $S = AU^{-1}$. Reste à vérifier que S est symétrique positive
(ce sont des conditions fermées) et on a gagné

Adhérence et valeurs d'adhérence d'une suite :

⚠ $VA((u_n)) \neq \overline{\{u_n, n\in\mathbb{N}\}}$ (en général, $\{u_n, n\in\mathbb{N}\} \not\subset VA(u)$, ils peuvent même être disjoints : $u_n = \frac{1}{n} > 0$, $VA(u) = 0$)

Prop $\boxed{VA((u_n)) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k, k\geq n\}}}$ (en particulier c'est un ensemble fermé)

Preuve Posons A l'ensemble de droite. Soit $x\in E$.

$x\in A \iff \forall n\in\mathbb{N},\ x\in \overline{\{u_k, k\geq n\}}$

$\iff \forall n\in\mathbb{N},\ \forall \varepsilon>0,\ B(x,\varepsilon)\cap\{u_k, k\geq n\}\neq\emptyset$

$\iff \forall n\in\mathbb{N},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists k\geq n$ tq $u_k\in B(x,\varepsilon)$

$\iff \forall\varepsilon>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \exists k\geq n$ tq $u_k\in B(x,\varepsilon)$

$\iff \forall\varepsilon>0,\ \{k\in\mathbb{N}, u_k\in B(x,\varepsilon)\}$ est non majoré

$\iff \forall\varepsilon>0,\ \#\{k\in\mathbb{N}, u_k\in B(x,\varepsilon)\} = +\infty$

$\iff x\in VA(u)$.

Corollaire $\boxed{VA(u) \text{ est fermé}}$