On va maintenant s'intéresser aux $\neq$ notions d'équivalence pour des distances. Avant ça, il nous faut observer que la topologie (ouverts, fermés) d'un espace métrique est complètement déterminée par ses suites convergentes :

Prop (caractérisation séquentielle de la topo des espaces métriques) Soit (E,d) un espace métrique et $A\subset E$. Alors

$$A \text{ est un fermé de } (E,d) \iff \forall (x_n)\in A^{\mathbb{N}} \text{ qui cv dans } (E,d),\ \lim_{n\to+\infty} x_n \in A$$

Rq l'implication $\Leftarrow$ ne sera pas vraie tout le temps en topologie générale.

Preuve $\Rightarrow$ Supposons A fermé et $(x_n)_n\in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $a\in E$.
Si $a\notin A$, $a\in A^c$ qui est un ouvert, donc un voisinage de a, auquel aucun terme de la suite n'appartient ! Cela contredit la convergence.

$\Leftarrow$ Supposons que A n'est pas fermé, ie que A^c n'est pas ouvert, ie qu'il existe $a\in A^c$ tq $\forall \varepsilon>0$, $B(a,\varepsilon)\not\subset A^c$, ie $B(a,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$
On peut donc construire une suite (x_n) d'éléments de A tq $\forall n$, $d(x_n,a)<\frac{1}{n+1}$, donc $\underset{A^{\mathbb{N}}}{\underset{\cap}{(x_n)}}$ cv vers $a\notin A$. Ceci prouve donc $\Leftarrow$ par contraposée. $\square$

Equivalences de distance

Déf • On dit que deux distances d_1 et d_2 sur E sont équivalentes si il existe des constantes $C, C'>0$ tq $d_1\leq C d_2$ et $d_2\leq C' d_1$

• On dit que deux dist. d_1 et d_2 sur E sont topologiquement équivalentes si toute suite qui cv pour l'une cv pour l'autre.

ou de façon équivalente si tout fermé pour l'une est fermé pour l'autre,
ou encore si elles définissent les mêmes ouverts.

II.23

<u>Exo</u> Vérifier en utilisant la proposition précédente que les reformulations sont bien équivalentes à la définition.

<u>Exo</u> : - Vérifier que deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes (indication : avec les suites)

- Vérifier que si deux distances d_1 et d_2 sur E sont équivalentes,
  - toute suite de Cauchy pour l'une l'est pour l'autre
  - (E,d_1) est complet $\iff$ (E,d_2) est complet
  - tout sous-ensemble borné pour l'une l'est pour l'autre.

Tout ceci n'est pas vrai si d_1 et d_2 sont seulement topologiquement équivalentes :

Sur $\mathbb{R}$, on considère : $d_1(x,y) = |x-y|$, $d_2(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$, $d_3(x,y) = |\arctan(x) - \arctan$

exo Toute suite convergeant pour l'une de ces distances converge pour les autres (<u>le vérifier !</u>). Les espaces $(\mathbb{R},d_1)$, $(\mathbb{R},d_2)$ et $(\mathbb{R},d_3)$ ont donc les mêmes ouverts.

En revanche :

- $(\mathbb{R},d_2)$ et $(\mathbb{R},d_3)$ sont bornés alors que $(\mathbb{R},d_1)$ ne l'est pas
- $(\mathbb{R},d_1)$ et $(\mathbb{R},d_2)$ sont complets ——— $(\mathbb{R},d_3)$ ——— :

La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $(\mathbb{R},d_1)$, donc pas non plus dans $(\mathbb{R},d_3)$, et pourtant elle est de Cauchy dans $(\mathbb{R},d_3)$:

$$\text{Si } m,n \geq 1,\ d_3(x_n,x_m) = |\arctan(n) - \arctan(m)| \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

<u>Moralité</u> Les notions d'ensembles bornés et de complétude dépendent de la métrique et pas seulement de la topologie que celle-ci définit (contrairement aux notions de cv, valeur d'adhérence ...)

§6. intérieur, adhérence, frontière, densité

Déf Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$

- On dit qu'un point a de A est un point intérieur de A s'il existe $r>0$ tq $B(a,r) \subset A$.
  L'ensemble des points intérieurs de A est appelé intérieur de A dans E et noté $\mathring{A}$
- On dit qu'un point $x \in E$ est adhérant à A si $\forall \varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon)$ rencontre A
  ie $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
  L'ensemble des pts adhérents à A est appelé adhérence de A dans E et noté $\bar{A}$.
- L'ensemble $\bar{A} \setminus \mathring{A}$ est appelé frontière de A dans E et noté ∂A.

Ce sont les déf les + intuitives, mais on va voir tout de suite des déf équivalentes parfois + faciles à manipuler et qui ont l'avantage de ne pas utiliser la distance, et de d'avoir un sens dès qu'on connaît les ouverts et fermés d'un espace, ie sa topologie

Ex dans $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, $A =]0,1]$: tout point de $]0,1[$ est intérieur à A, 1 ne l'est pas
tout point de $[0,1]$ est adhérent à A et ce sont les seuls.

donc $\mathring{A} =]0,1[\subset A \subset \bar{A} = [0,1]$

Ces inclusions sont un fait général : $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$, direct à partir de la définition.

Exo Rq $\bar{A} = \{x \in E, d(x,A) = 0\}$. Ainsi $\bar{A}$ est l'ensemble des zéros d'une fct° lip. En particulier, tout fermé est l'ensemble des zéros d'une fonction lipschitzienne.

Caractérisation topologique :

1) • $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A
(au sens où : $\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans A et $\forall V$ ouvert $\subset A$, $V \subset \mathring{A}$) , autrement dit, $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{V \text{ ouvert} \\ \subset A}} V$

2) • $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A
(au sens où : $\bar{A}$ est un fermé contenant A et $\forall F$ fermé $\supset A$, $\bar{A} \subset F$) autrement dit, $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ \supset A}} F$

Preuve 1) • $\mathring{A}$ est ouvert : Soit $a \in \mathring{A}$. $\exists r>0$ tq $B(a,r) \subset A$.
Vérifions que $B(a,r) \subset \mathring{A}$. En effet, $\forall x \in B(a,r)$, $B(x, \underbrace{r - d(x,a)}_{>0}) \subset B(a,r)$ par inégalité Δ
donc x est aussi intérieur à A

• Soit V un ouvert inclus dans A. $\forall x \in V$, $\exists \delta > 0$ tq $B(x,\delta) \subset V \subset A$ donc x est intérieur à A donc $x \in \mathring{A}$. Ainsi $V \subset \mathring{A}$

• $\overset{(*)}{\text{c'est}}$ bien équivalent à $\mathring{A} \overset{(**)}{=} \bigcup_{\substack{V \subset A \\ \text{ouvert}}} V$ car $(*) \Rightarrow \mathring{A}$ contient $\bigcup_{\substack{V \subset A \\ \text{ouvert}}} V$
et $\mathring{A}$ ouvert $\Rightarrow \mathring{A} \subset \bigcup_{\substack{V \subset A \\ \text{ouvert}}} V$
d'où l'égalité

et réciproquement (**) $\Rightarrow$ $\mathring{A}$ ouvert comme réunion d'ouvert et par def $\mathring{A}$ contient ts les ouverts inclus dans A.

2) • Observons que $\boxed{{}^c(\bar{A}) = \mathring{({}^cA)}}$. En effet,

si $x \in {}^c(\bar{A})$, $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ ie tq $B(x,\varepsilon) \subset {}^cA$ donc $x \in \mathring{({}^cA)}$

réciproquement, même chose !

et du coup $\bar{A} = {}^c\left(\mathring{({}^cA)}\right) = {}^c\left(\bigcup_{\substack{V \subset {}^cA \\ \text{ouvert}}} V\right)$

$$= \bigcap_{\substack{V \subset {}^cA \\ \text{ouvert}}} {}^cV$$

Mais V est un ouvert inclus dans ${}^cA$ $\Leftrightarrow$ ${}^cV$ est un fermé contenant A

et on trouve bien $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ \supset A}} F$, dc $\bar{A}$ est le + petit fermé contenant A.

Rq1 il y a toujours au moins un ouvert inclus dans A ($\emptyset$) et un fermé contenant A (E)

Rq2 On a de la même façon $\boxed{{}^c(\mathring{A}) = \overline{({}^cA)}}$ et par suite

$$\boxed{\partial({}^cA)} = \overline{{}^cA} \setminus \mathring{({}^cA)} = {}^c(\mathring{A}) \setminus {}^c(\bar{A}) = {}^c(\mathring{A}) \cap \underbrace{{}^c({}^c\bar{A})}_{\bar{A}} = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \boxed{\partial A}$$

Rq3 $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap \overline{{}^cA}$ donc

Prop $\forall x \in E$, $x \in \partial A$ ssi $\forall r > 0$, $B(x,r)$ intersecte A et ${}^cA$

Rq4 • $A \subset E$ est un ouvert ssi $\mathring{A} = A$

• $A \subset E$ est un fermé ssi $\bar{A} = A$

Mise en garde l'intérieur, l'adhérence et le bord sont définis par rapport à l'espace ambient E et en dependent !

Considérons $(E,d) = (\mathbb{R}, d_{1,1})$ et $A = \mathbb{Z}$

dans (E,d), • $\mathring{A} = \emptyset$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$, $\nexists r > 0$ tq $\underbrace{B_{(\mathbb{R},d_{1,1})}(k,r)}$ $\subset \mathbb{Z}$)

un intervalle ouvert non vide contient des nb non entiers !

• $\bar{A} = A$ (A est fermé : toute suite d'entiers qui cv ds $\mathbb{R}$ est stationnaire dc cv dans $\mathbb{Z}$)

• $\partial A = A$

Dans $(\mathbb{Z}, d_{|\cdot|})$ (c'est un espace métrique !)

A est l'espace tt entier dc ouvert et fermé donc $\bar{A} = \mathring{A} = A$

pour éviter le doute on devrait écrire $Adh_E(A)$, $Int_E(A)$, $Fr_E(A)$.

Exemple Si $(E, \|\ \|)$ est un evn et $A \subset E$ satisfait $B(x,r) \subset A \subset \underbrace{\bar{B}(x,r)}_{\text{boule fermée}}$ pour un $x \in E$ et un $r > 0$

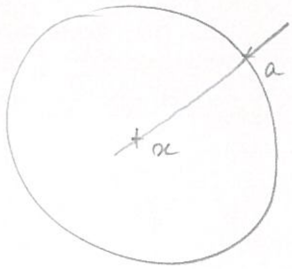
Alors $\mathring{A} = B(x,r)$ et $\bar{A} = \bar{B}(x,r)$

en effet, $B(x,r)$ est un ouvert inclus ds A donc $B(x,r) \subset \mathring{A}$

et : si $a \in A \setminus B(x,r)$, $\|x-a\| = r$, mais alors $\forall \varepsilon > 0$,

$$\overbrace{a + \frac{\varepsilon}{2r}(a-x)}^{\in E} \in B(a,\varepsilon)$$

$$\left(\left\|a - \left(a + \frac{\varepsilon}{2r}(a-x)\right)\right\| = \frac{\varepsilon}{2}\frac{r}{r} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\right)$$



mais $\notin A$:

$$\left\|x - \left(a + \frac{\varepsilon}{2r}(a-x)\right)\right\| = \left\|(x-a)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2r}\right)\right\| = r\left(1 + \frac{\varepsilon}{2r}\right) > r$$

donc $\notin \bar{B}(x,r)$ qui contient A.

Donc a n'est pas intérieur à A. On a donc bien $\mathring{A} = B(x,r)$

Exo preuve pour l'adhérence

⚠ la preuve ne marche plus si E n'est pas un evn ($a + \frac{\varepsilon}{2r}(a-x)$ n'a pas de sens !)

et en général on aura simplement $B(x,r) \subset \mathring{A}$ (puisque c'est un ouvert inclus dans A)

et $\bar{A} \subset \bar{B}(x,r)$ (puisque c'est un fermé qui contient A)

Avant de donner d'autres exemples on va donner une autre caractérisation de l'adhérence. attention, elle ne se généralisera pas à tous les espaces topologiques

Proposition (critère séquentiel d'adhérence) Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Alors $\forall x \in E$,

$\underset{(i)}{x \in \bar{A}} \iff \underset{(ii)}{\text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ qui cv vers } x \text{ dans } E}$.

Preuve (ii) ⇒ (i) (toujours vrai)

Soit $x \in E$ tq $\exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq (x_n) cv vers x. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$. donc en particulier $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$. Ceci signifie précisément que $x \in \overline{A}$.

(i) ⇒ (ii) Supposons que $x \in \overline{A}$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$. Cela nous donne bien une suite d'éléments de A qui cv vers x puisque $d(x, x_n) < \frac{1}{n} \to 0$ □

Nouveaux exemples

Dans $(\mathbb{R}, d_{|.|})$, • $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ tout entier : tt élt de $\mathbb{R}$ est limite de suite de rationnels (cf densité, vue dans le chap 1)

• $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$. En effet, soit $a \in \mathbb{Q}$ et $r > 0$. $B_{|.|}(a,r) =]a-r, a+r[$

cet intervalle n'est pas inclus dans $\mathbb{Q}$. En effet, cet intervalle est un ensemble non dénombrable (car en bijection ac $\mathbb{R}$. le montrer) et $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc a n'est pas intérieur à $\mathbb{Q}$.

Rq ceci équivaut à dire que ${}^c\left(\overline{{}^cA}\right) = \emptyset$ soit $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

ou encore $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est (lui aussi) dense dans $\mathbb{R}$.

Def Un sous-ens A d'un espace métrique (E, d) est dense dans E si $\overline{A} = E$.

Par def de l'adhérence, cela revient à : $\forall x \in E$, $\forall$ boule B centrée en x, $B \cap A \neq \emptyset$

Autrement dit : A rencontre tte boule ouverte, ou encore A rencontre tout ouvert, ou encore ${}^cA$ ne contient aucun ouvert donc est d'intérieur vide (ou encore, ac le critère séquentiel, tt élt de E est limite d'élts de A.

Autre exemple de sous-ensemble dense : $GL_n(\mathbb{R}) \subset \underbrace{M_n(\mathbb{R})}$, que l'on munit de la norme $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$ (on verra que ça n'a en fait pas d'importance)

Il s'agit de vérifier que tte boule ouverte de $M_n(\mathbb{R})$ rencontre $GL_n(\mathbb{R})$. Soit donc $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Considérons le polynôme caract de A $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$

C'est un polynôme de degré n donc il a un nb fini de racine. Il existe donc $\lambda \in]0, \varepsilon[$ tq $\chi_A(\lambda) \neq 0$, ie tq $A - \lambda I_n$ inversible. Et $\|A - (A - \lambda I_n)\| = \lambda < \varepsilon$ donc on a ce qu'on voulait